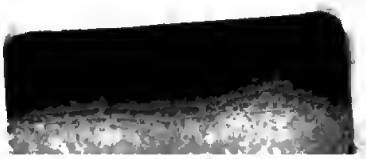
15.6.843

15.6.843



Google

X.1

PAULI

T. III

1834

SUPPLEMENTO

AGLI ELEMENTI

DI ALGEBRA

DI

PIETRO PAOLI

P. P. DELLE MATEMATICHE SUPERIORI NELL'UNIVERSITÀ DI PISA, UNO DE'QUARANTA DELLA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE, E DELL'ISTITUTO DI BOLOGNA.

INEDITO

PISA

DALLA TIPOGRAFIA

DELLA SOCIETÀ LETTERARIA

MDCCCIV.

PREFAZIONE

DELL' AUTORE

Il principale oggetto, che io mi proposi nello scrivere i miei Elementi d' Algebra pubblicati per la prima volta nell'an. 1794, *fu quello di porre i giovani studiosi di tale scienza in grado di leggere senza inciampo i libri dei grandi Geometri. Dopo quel tempo è comparsa alla luce un' opera molto più estesa, parto dell' insigne Geometra* Lacroix, *nella quale sono raccolte ed accuratamente esposte tutte le importanti scoperte fatte nell' Analisi fino a questi ultimi tempi. Questa opera interessante, che porta il titolo di* Trattato del Calcolo Differenziale ed Integrale, *presentando in bell' ordine e con somma chiarezza e diligenza sviluppate tutte quelle teorie, che erano sparse per gli Atti delle diverse Accademie, ha reso per i giovani Geometri più facile e più pronto l' acquisto di tutte le ricchezze dell' Algebra: e di una tale opera raccomando specialmente lo studio a quelli tra i miei discepoli, i quali avendo ben compreso tutto ciò, che ne' miei Elementi si contiene, si propongono di penetrare più avanti negli arcani misteri della Scienza. Intento sempre a render loro più piana la difficil carriera ho aggiunto a questa terza Edizione un Supplemento sopra diversi oggetti, dei quali, per quanto in gran parte trattati siano da* Lacroix, *e compresi nella moltitudine delle cose da lui contemplate, sembrami si possa da alcuno desiderare un ulteriore sviluppo.*

Nel prim' Opuscolo di questo Supplemento prendo ad esporre i principj del Calcolo Differenziale ed Integrale secondo il nuovo metodo dell' immortale Lagrange. *Dopo di aver procurato di schiarire quelle difficoltà, che possono incontrarsi nella lettura della* Teoria delle funzioni analitiche, *non mi sono lungamente fermato in quelle materie, che in tale eccellente Opera sono divinamente trattate, ma piuttosto mi sono alquanto trattenuto in altre, le quali non vi sono che appena indicate, e specialmente nel mostrare la dipendenza dai nuovi principj dei metodi più im-*

portanti del Calcolo Integrale. Avevo altre volte concepita l'idea di rifondere tutto il II. Tomo, e fare ad esso vestire quella nuova forma, che presenta il calcolo delle funzioni derivate; ma poi mi sono astenuto da ciò fare per alcune ragioni. Primieramente, siccome tutti i libri sono scritti nello stile usato ne' miei Elementi, facendo tal cangiamento avrei dovuto lungamente trattenermi nel passaggio dalle nuove forme a tutti quei modi di espressioni e di calcoli, che volgarmente si adoprano. In secondo luogo parmi, che nelle ricerche molto complicate non convenga rinunziare a quella brevità di discorso, che presenta lo stile comunemente adottato, e basti essere assicurato che quei modi meno esatti conducono certamente ai medesimi resultati, che con più lungo giro di ragionamenti si ottengono da altri principj più rigorosi. Per le medesime ragioni ho creduto bene di conservare la stessa caratteristica del Calcolo Differenziale per denotare le funzioni derivate, non trovando alcuno inconveniente nell' indicare col medesimo segno una funzione, la quale, per quanto possa avere una origine ed una denominazione diversa, è però la medesima in sostanza, e si forma con le medesime regole. Anzi mi è sembrata utile cosa, che nella complicazione dei calcoli un istesso segno presenti insieme alla mente tutti i principj, dai quali può esser nata la funzione da tal segno rappresentata.

Il second' Opuscolo si aggira per la sua maggior parte nella esposizione dei principj generali, dai quali dipende la risoluzione diretta dell' equazioni. Siccome è necessario, che sia generalmente conosciuta e coltivata da tutti gli studiosi dell' Algebra una materia così importante, la quale fin qui è in pochi libri convenientemente sviluppata, ho procurato di appianare le difficoltà, che nello studio della medesima si potrebbero incontrare. Vi ho aggiunte alcune altre ricerche, le quali servono a completare la Teoria dell' equazioni esposta nel I. Tomo.

Finalmente il terzo Opuscolo presenta il saggio di una teoria presso che nuova finora, ed intatta dalle ricerche dei Geometri, cioè della integrazione dell' equazioni a differenze parziali finite ed infinitesime, la quale per i molti ed interessanti usi, che presta alla dottrina delle Serie, merita di esser con tutto l' impegno coltivata e promossa.

OPUSCOLO I.

ESPOSIZIONE DEI PRINCIPJ DEL CALCOLO DIFFERENZIALE SECONDO IL METODO DI LAGRANGE.

I principj del Calcolo Differenziale e dagli inventori di esso e da altri Geometri, che l'hanno in seguito coltivato, sono stati presentati in varie maniere più o meno rigorose, le quali però sono tutte soggette a qualche difficoltà, e lasciano nella mente qualche dubbio sull'evidenza dei medesimi principj. Sarebbe inutile il ripeter qui la storia de' tentativi che sono stati fatti per illustrare la metafisica di questo calcolo, e condurre i di lui metodi al rigore delle antiche dimostrazioni, la quale è in molti libri descritta. Uno dei modi i più accurati consiste nel riguardare il coefficiente differenziale $\frac{dy}{dx}$ come il limite, al quale và sempre più accostandosi il rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, quanto più diminuiscono le differenze finite Δx e Δy, senza mai giungervi, se non quando quelle differenze svaniscono; e di questa considerazione ci siamo noi prevalsi nel volume precedente. Ma quantunque si renda con gli esempj sensibile, che un tal limite esiste ed è determinabile, convien però confessare che in generale il rapporto di due quantità, allorchè esse cessano di esser tali, cioè quando divengono ambedue zero, non somministra alla mente una idea chiara e precisa.

Dopo molti inutili sforzi è finalmente riescito ne' nostri tempi al sommo Geometra *Lagrange* di ridurre il Calcolo Diffe-

renziale a quella evidenza e rigore, che accompagnano un semplice calcolo analitico, spogliandolo di qualunque considerazione ad esso straniera, e facendolo dipendere dalle regole ordinarie dell' Algebra. Egli osservò nello sviluppo della funzione $F.(x+i)$, che presenta il teorema di *Taylor*, cioè nella serie

$$F.x+i\frac{dF.x}{dx}+\frac{i^2}{2}\frac{d^2F.x}{dx^2}+\frac{i^3}{2.3}\frac{d^3F.x}{dx^3}+\text{ec.}$$

il termine che moltiplica i essere il coefficiente differenziale $\frac{dF.x}{dx}$, e riflettendo che il medesimo sviluppo si poteva ottenere indipendentemente dal Calcolo Differenziale con i metodi, che l'Algebra insegna, vide che dalla evoluzione delle funzioni in serie ripeter si poteva l'origine della quantità $\frac{dy}{dx}$, considerandola come il coefficiente di i nello sviluppo della funzione y, dopo di avervi sostituito $x+i$ in luogo di x. L'esposizione dei principj del Calcolo Differenziale secondo questo nuovo metodo forma l'oggetto del presente Opuscolo. E poichè ci siamo spesso serviti del Calcolo Differenziale nella ricerca delle serie, procureremo di ricavare da altri principj quelle, delle quali abbisogneremo; affinchè non possa nascere il dubbio che noi usiamo un vizioso ragionamento, facendo servire alla dimostrazione di un metodo quelle verità, che dal medesimo sono state dedotte.

1.

Sia data una funzione qualunque di x, che indicheremo col segno $F.x$; ponghiamoci $x+i$ in luogo di x essendo i una quantità indeterminata, e svolgiamola in una serie ordinata per le potenze positive di i. È evidente che il primo termine sarà $F.x$, ed esprimendo con le lettere p, q, r, ec. i coefficienti di i, i^2, i^3, ec. avremo

$$F.(x+i)=F.x+pi+qi^2+ri^3+\text{ec.}$$

Noi chiameremo $F.x$ la funzione *primitiva*, e p la funzione *derivata* da $F.x$, e per determinare il valore di p dovremo svolgere in serie con le regole dell'Algebra la funzione $F.(x+i)$, ed il coefficiente, che in questa serie avrà i, sarà il valore cercato. Così pure, se nella funzione p porremo $x+i$ in luogo di x, e poi la svolgeremo in serie, il coefficiente di i sarà la funzione

prima derivata da p, a cui daremo il nome di funzione *seconda* derivata da $F.x$. Da questa coll'istesso metodo dedurremo la funzione terza derivata da $F.x$, e così in seguito: onde apparisce, che le funzioni derivate di qualunque ordine si ricavano una dall'altra con la ripetizione delle medesime operazioni. Sia data per esempio la funzione x^3; ponghiamoci $x+i$ in luogo di x, e svolgendo $(x+i)^3$ avremo x^3+3x^2i+ec., e quindi sarà $3x^2$ la funzione prima derivata da x^3. Nella quantità $3x^2$ ponghiamoci $x+i$ in luogo di x, ed avremo $3(x+i)^2=3x^2+6xi+$ec., onde $6x$ è la funzione seconda derivata da x^3. Di nuovo la quantità $6x$, mettendovi $x+i$ in luogo di x diventa $6x+6i$, e perciò 6 è la terza funzione derivata da x^3, la quale essendo costante, è chiaro che le seguenti funzioni derivate saranno tutte zero.

2.

Quando sapremo trovare le funzioni derivate da qualunque funzione Fx, avremo il valore di tutti i coefficienti p, q, r, ec. delle potenze di i nello sviluppo della funzione $F.(x+i)$. Ponghiamo infatti che x divenga $x+l$, essendo l una quantità indeterminata e indipendente da i; $F.(x+i)$ diventerà $F.(x+i+l)$, ed è evidente che otterremo il medesimo resultato, se nella serie, che rappresenta il valore di $F.(x+i)$, porremo $i+l$ in luogo di i, o $x+l$ in luogo di x. Mediante la prima sostituzione quella serie diventerà

$$F.x+p(i+l)+q(i+l)^2+r(i+l)^3+s(i+l)^4+\text{ec.}$$

o sia, svolgendo le potenze di $i+l$,

$$\begin{aligned} &F.x+pi+qi^2+ri^3+si^4+\text{ec.}\\ &\quad +pl+2qil+3ri^2l+4si^3l+\text{ec.}\\ &\quad +\text{ec.} \end{aligned}$$

Per eseguire la seconda sostituzione supponghiamo che $F.x$, p, q, r, ec. divengano respettivamente $F.x+F'.xl+$ec., $p+p'l+$ec., $q+q'l+$ec., $r+r'l+$ec., quando vi si pone $x+l$ invece di x, e la medesima funzione $F.(x+i+l)$ sarà rappresentata dalla serie

$$\begin{aligned} &F.x+pi+qi^2+ri^3+si^4+\text{ec.}\\ &\quad +F'.xl+p'il+q'i^2l+r'i^3l+\text{ec.}\\ &\quad +\text{ec.} \end{aligned}$$

Ora queste due serie dovendo essere identiche, qualunque sia-

no i ed l, converrà che siano i medesimi in ambedue i coefficienti di l, il, i^2l, ec.; onde avremo $p=F'.x$, $2q=p'$, $3r=q'$, $4s=r'$, ec. Ma $F'.x$, p', q', r', ec. sono respettivamente le prime funzioni derivate da $F.x$, p, q, r, ec.; perciò se indichiamo con i segni $F'.x$, $F''.x$, $F'''.x$, $F^{IV}.x$, ec. le funzioni prima, seconda, terza, quarta, ec. derivate da $F.x$, avremo $p=F'.x$, e $p'=F''.x$, $q=\frac{p'}{2}=\frac{F''.x}{2}$, e $q'=\frac{F'''.x}{2}$, $r=\frac{q'}{3}=\frac{F'''.x}{2.3}$, ed $r'=\frac{F^{IV}.x}{2.3}$, $s=\frac{r'}{4}=\frac{F^{IV}.x}{2.3.4}$, e così in seguito. Sarà pertanto

$$F.(x+i)=F.x+iF'.x+i^2\frac{F''.x}{2}+i^3\frac{F'''.x}{2.3}+i^4\frac{F^{IV}.x}{2.3.4}+\text{ec.}$$

Quindi, allorchè sapremo trovare la prima funzione derivata da qualunqne funzione, potremo non solo trovare tutte le funzioni derivate di qualunque ordine, ma anche tutti i termini della serie precedente.

3.

Vediamo adesso, come per le regole dell' Algebra si determini la prima funzione derivata dalle diverse specie di quantità. Sia data in primo luogo la funzione $\log.x$, e ponendovi $x+i$ in luogo di x essa diventerà $\log.(x+i)=\log.x+\log.\left(1+\frac{i}{x}\right)$. Svolgiamo in serie questa ultima quantità, e ponghiamo

$$\log.\left(1+\frac{i}{x}\right)=A\frac{i}{x}+B\frac{i^2}{x^2}+C\frac{i^3}{x^3}+D\frac{i^4}{x^4}+\text{ec.}$$

A, B, C, ec. essendo costanti, ove ho lasciato il termine senza i, perchè questo sarebbe $=\log.1$, che è zero in tutti i sistemi di logaritmi. Siccome

$\log.\left(1+\frac{i}{x}\right)^2=\log\left(1+\frac{2i}{x}+\frac{i^2}{x^2}\right)=2\log.\left(1+\frac{i}{x}\right)$, è chiaro che il doppio della serie precedente sarà eguale a ciò, che diventa la medesima serie, qnando in luogo di $\frac{i}{x}$ vi si pone $\frac{2i}{x}+\frac{i^2}{x^2}$. Avremo adunque svolgendo le potenze di $\frac{2i}{x}+\frac{i^2}{x^2}$ l' equazione identica

$$2A\frac{i}{x}+2B\frac{i^2}{x^2}+2C\frac{i^3}{x^3}+2D\frac{i^4}{x^4}+\text{ec.}$$
$$=2A\frac{i}{x}+A\frac{i^2}{x^2}+4B\frac{i^3}{x^3}+B\frac{i^4}{x^4}+\text{ec.}$$
$$+4B\frac{i^2}{x^2}+8C\frac{i^3}{x^3}+12C\frac{i^4}{x^4}+\text{ec.}$$
$$+16D\frac{i^4}{x^4}+\text{ec.}$$

e perciò $A+2B=0$, $4B+6C=0$, $B+12C+14D=0$, ec. Mediante quest'equazioni, nelle quali le quantità A, B, C, ec. entrano linearmente, dato il primo coefficiente A potremo per esso determinare il valore di tutti gli altri coefficienti B, C, D, ec. e perciò il valore di $\log.\left(1+\frac{i}{x}\right)$ sarà bene rappresentato dalla serie assunta. Rimane però indeterminata la quantità A; ma essa deve esser tale, perchè la serie rappresenti il valore di $\log.\left(1+\frac{i}{x}\right)$ in tutti gl'infiniti sistemi di logaritmi. In seguito vedremo qual rapporto ha questa quantità A con la base di ciascun sistema; intanto osserveremo che il valore di $A=1$ appartiene ad un sistema di logaritmi, che si chiamano *naturali* o *iperbolici*. Onde, se consideriamo i logaritmi di questo sistema, sarà la funzione prima derivata da $\log.x$ eguale ad $\frac{1}{x}$.

4.

Passiamo a considerare la funzione x^n, ove n è una quantità costante qualunque, la qual funzione posto $x+i$ in luogo di x diventa $(x+i)^n$, e facciamo

$$(x+i)^n=x^n+pi+qi^2+ri^3+\text{ec.}$$

Prendendo i logaritmi iperbolici avremo

$$n\log.(x+i)=n\log.x+\log.\left(1+\frac{p}{x^n}i+\frac{q}{x^n}i^2+\text{ec.}\right)$$

e riducendoli in serie

$$n\log.x+\frac{n}{x}i+\text{ec.}=n\log.x+\frac{p}{x^n}i+\text{ec.}$$

cioè $\frac{p}{x^n}=\frac{n}{x}$, e $p=nx^{n-1}$. Sarà dunque nx^{n-1} la funzione prima derivata da x^n, cioè posta $F.x=x^n$, sarà $F'.x=nx^{n-1}$, e quindi $F''.x=n(n-1)x^{n-2}$, $F'''.x=n(n-1)(n-2)x^{n-3}$, ec. Onde avremo

$$(x+i)^n=x^n+nx^{n-1}i+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}i^2+\text{ec.}$$

che è la nota formola delle potenze del binomio, la quale è così dimostrata accuratamente per qualunque valore dell'esponente n.

Posta $F.x=\log.x$, siccome abbiamo pel numero precedente in qualunque sistema di logaritmi $F'.x=\frac{A}{x}=Ax^{-1}$, sarà $F''.x=-Ax^{-2}$, $F'''.x=2Ax^{-3}$, $F^{IV}.x=-2.3Ax^{-4}$, ec. e perciò

$$\log.(x+i)=\log.x+A\left(\frac{i}{x}-\frac{i^2}{2x^2}+\frac{i^3}{3x^3}-\frac{i^4}{4x^4}+\text{ec.}\right)$$

Ora se facciamo $1+\frac{i}{x}=$ alla base c dei logaritmi, avremo

$$\log.(x+i)-\log.x=\log.\left(1+\frac{i}{x}\right)=\log.c=1=A\left(c-1-\frac{(c-1)^2}{2}+\frac{(c-1)^3}{3}-\text{ec.}\right),$$

nella qual'equazione $1=A\left(c-1-\frac{(c-1)^2}{2}+\text{ec.}\right)$ è espressa la relazione tra la quantità A e la base c.

5.

Se adesso facciamo $F.x=a^x$, sarà $F.(x+i)=a^{x+i}$; ponghiamo

$$a^{x+i}=a^x+pi+qi^2+\text{ec.}$$

e prendendo i logaritmi iperbolici avremo

$$(x+i)\log a=x\log.a+\log.\left(1+\frac{p}{a^x}i+\frac{q}{a^x}i^2+\text{ec.}\right)$$

$$=x\log.a+\frac{p}{a^x}i+\text{ec.}$$

onde si deduce $p=a^x\log.a$, e questa è la funzione prima deri-

vata da a^x. Sarà dunque $F.x=a^x\log.a$, $F''.x=a^x\overline{\log.a}^2$, $F'''.x=a^x\overline{\log.a}^3$, e

$$a^{x+i}=a^x\left(1+i\log.a+i^2\frac{\overline{\log.a}^2}{2}+i^3\frac{\overline{\log.a}^3}{2.3}+\text{ec.}\right)$$

Se a è la base dei logaritmi iperbolici, che chiameremo e, siccome $\log.e=1$, sarà e^x la funzione prima derivata da e^x, e mettendo nel valore di a^{x+i} la quantità e in luogo di a e facendo $x=0$ avremo

$$e^i=1+i+\frac{i^2}{2}+\frac{i^3}{2.3}+\frac{i^4}{2.3.4}+\text{ec.},$$

dalla qual serie, posta $i=1$, si può calcolare il valore di e.

6.

Per trovare le funzioni derivate da sen.x e cos.x bisogna prima cercare le serie, che esprimono queste quantità, ed a tale oggetto ci serviremo della nota equazione

$$\cos.(x+i)=\cos.x\times\cos.i-\text{sen}.x\times\text{sen}.i\,.$$

Ponghiamo

$$\text{sen}.x=Ax+A1x^3+A2x^5+A3x^7+\text{ec.}$$
$$\cos.x=1+Bx^2+B1x^4+B2x^6+\text{ec.}$$

ove nella serie del seno abbiamo omesse le potenze pari di x, e le dispari in quella del coseno, perchè sen.$-x=-$sen.x, e cos.$-x=$cos.x. Cangiando x in i, o ponendo nella serie del coseno $x+i$ in luogo di x avremo

$$\text{sen}.i=Ai+A1i^3+A2i^5+A3i^7+\text{ec.}$$
$$\cos.i=1+Bi^2+B1i^4+B2i^6+\text{ec.}$$
$$\cos.(x+i)=1+B(x+i)^2+B1(x+i)^4+B2(x+i)^6+\text{ec.}$$

Sostituendo questi valori nella equazione precedente, e non considerando che i termini, nei quali i non supera la seconda dimensione, perchè questi soli bastano per determinare i coefficienti della serie, otterremo l'equazione identica

$$\begin{aligned}
&2Bxi+\ 4B1x^3i+\ 6B2x^5i+\ 8B3x^7i+\text{ec.}\\
&+\ Bi^2+\frac{4.3}{2}B1x^2i^2+\frac{6.5}{2}B2x^4i^2+\frac{8.7}{2}B3x^6i^2+\text{ec.}\\
&=\ Bi^2+\ B^2x^2i^2+BB1x^4i^2+\ BB2x^6i^2+\text{ec.}\\
&-\ A^2xi-\ AA1x^3i-AA2x^5i\ -\ AA3x^7i-\text{ec.}
\end{aligned}$$

Dunque paragonando i termini simili avremo $2B=-A^2$, $4B1=-AA1$, $6B2=-AA2$, $8B3=-AA3$, ec., $4.3B1=2B^2$, $6.5B2=2BB1$, $8.7B3=2BB2$, ec; onde si deduce $B=-\frac{A^2}{2}$,

$B1=\frac{A^4}{2.3.4}$, $B2=-\frac{A^6}{2.3.4.5.6}$, $B3=\frac{A^8}{2.3.4.5.6.7.8}$, ec.

$A1=-\frac{A^3}{2.3}$, $A2=\frac{A^5}{2.3.4.5}$, $A3=-\frac{A^7}{2.3.4.5.6.7}$, ec.

Per trovare il valore del coefficiente A, che resta indeterminato, si osservi che l'arco è sempre maggiore del seno e minore della tangente; onde $\text{sen.}x<x$, $\frac{\text{sen.}x}{\sqrt{(1-\text{sen.}^2x)}}>x$, e da questa ultima relazione si deduce $\text{sen.}x>\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}>\frac{x}{1+x^2}$ a motivo di $\sqrt{(1+x^2)}$ più grande dell'unità. Ora mediante la divisione si trova $\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+\frac{x^4}{1+x^2}$, cioè $\frac{1}{1+x^2}>1-x^2$; dunque tanto più sarà $\frac{\text{sen}\,x}{x}>1-x^2$. Sostituendo adesso invece del seno la serie, che lo rappresenta, avremo

$$A-\frac{A^3x^2}{2.3}+\frac{A^5x^4}{2.3.4.5}-\frac{A^7x^6}{2.3.4.5.6.7}+\text{ec.}<1 \text{ e } >1-x^2.$$

Ma se sommiamo il secondo termine col terzo, il quarto col quinto, ec., oppure il terzo col quarto, il quinto col sesto, ec., questa serie prende le forme seguenti

$$A+\frac{A^3x^2}{2.3}\left(\frac{A^2x^2}{4.5}-1\right)+\frac{A^7x^6}{2.3.4.5.6.7}\left(\frac{A^2x^2}{8.9}-1\right)+\text{ec.}$$

$$A-\frac{A^3x^2}{2.3}+\frac{A^5x^4}{2.3.4.5}\left(1-\frac{A^2x^2}{6.7}\right)+\frac{A^9x^8}{2.3\ldots9}\left(1-\frac{A^2x^2}{10.11}\right)+\text{ec.}$$

E se ponghiamo x tale, che sia $\frac{A^2x^2}{2.3}<1$, nel qual caso la serie del seno è convergente fino dal suo principio, i termini $\frac{A^2x^2}{4.5}-1$, $\frac{A^2x^2}{8.9}-1$, ec. saranno tutti negativi, e viceversa i termini $1-\frac{A^2x^2}{6.7}$, $1-\frac{A^2x^2}{10.11}$, ec. tutti positivi. Onde avremo la serie

$$A-\frac{A^3x^2}{2.3}+\frac{A^5x^4}{2.3.4.5}-\text{ec.}<A \text{ e } >A-\frac{A^3x^2}{2.3},$$

e paragonando questi limiti con quelli ottenuti di sopra ne dedurremo $A>1-x^2$, ed $A-\frac{A^3x^2}{2.3}<1$; e siccome queste relazioni devono aver luogo, qualunque sia x, ne ricaveremo $A=1$. Poichè se A fosse maggiore dell'unità, cioè se fosse $A=1+o$, la relazione $A-\frac{A^3x^2}{2.3}<1$ non avrebbe luogo per i valori di x tali, che fosse $\frac{A^3x^2}{2.3}<o$; se poi A fosse <1 ed $=1-o$, non sussisterebbe il rapporto $A>1-x^2$, quando x^2 è $<o$. Sarà dunque $A=1$, e perciò

$$\text{sen.}x=x-\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^5}{2.3.4.5}-\text{ec.}$$

$$\cos.x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2.3.4}-\text{ec.}$$

Adesso per trovare le funzioni derivate da sen.x e da cos.x ponghiamo nell'equazioni sen.$(x+i)$=sen.$x\times$cos.i+cos.$x\times$sen.i, cos.$(x+i)$=cos.$x\times$cos.i—sen.$x\times$sen.i i valori in serie di sen.i e di cos.i, e vedremo che la funzione prima derivata da sen.x è =cos.x, e quella derivata da cos.x è =—sen.x.

7.

Abbiamo trovate le funzioni derivate dalle quantità x^n, a^x, log.x, sen.x, e cos.x, che sono le più semplici funzioni, dalle quali con le operazioni dell'Algebra si formano tutte le altre. Se p, q, r, ec. saranno funzioni semplici di x, ed y una funzione composta di p, q, r, ec., ponendosi $x+i$ in luogo di x le quantità p, q, r, ec. diventeranno $p+p'i+$ec., $q+q'i+$ec., $r+r'i+$ec., ec., e sostituendo queste quantità in y, e sviluppando i termini secondo le potenze di i, il coefficiente di i ci darà la funzione prima derivata da y. Vedremo tra poco il modo di giungere più facilmente alle funzioni derivate dalle funzioni composte; ma prima per maggior brevità di discorso prenderemo un segno per indicare le funzioni derivate. E per non allontanarci dai segni adottati, se y è una funzione di x, denoteremo la funzione prima derivata da essa col segno $\frac{dy}{dx}$, ove la x che è nel denominatore indica che x è la variabile, di cui y è fun-

zione. Così $\frac{dz}{dt}$ significa la funzione prima derivata da z, quando z è funzione di t. Ma convien riflettere che questa maniera di scrivere è indipendente da qualunque idea di limiti e d'infinitamente piccoli, che $\frac{dy}{dx}$ non è che un segno, e rappresenta il coefficiente di i nella funzione y sviluppata secondo le potenze di i, dopo di avervi sostituito $x+i$ in luogo di x. Così pure esprimeremo col segno $\frac{d^2y}{dx^2}$ la funzione seconda derivata da y, e questo segno non significa che il coeffioiente di i nella serie, che nasce dallo sviluppo della funzione $\frac{dy}{dx}$, dopo che invece di x vi si è posto $x+i$, e così in seguito. Secondo questa maniera di scrivere la funzione y, allorchè vi si pone $x+i$ in luogo di x, diventa $y+i\frac{dy}{dx}+\frac{i^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{i^3}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3}+$ec.

8.

Sia adesso $y=F.p$, e p funzione di x, e posta $x+i$ in luogo di x la funzione p diventerà $p+i\frac{dp}{dx}+\frac{i^2}{2}\frac{d^2p}{dx^2}+$ec.$=p+l$, facendo per più semplicità $i\frac{dp}{dx}+\frac{i^2}{2}\frac{d^2p}{dx^2}+$ec.$=l$. Dunque per la medesima sostituzione y diventerà $F.(p+l)$, cioè $F.p+l\frac{dF.p}{dp}+\frac{l^2}{2}\frac{d^2F.p}{dp^2}+$ec., la qual'espressione mettendovi il valore di l diventa $F.p+i\frac{dp}{dx}.\frac{dF.p}{dp}+\frac{i^2}{2}\left(\frac{d^2p}{dx^2}.\frac{dF.p}{dp}+\left(\frac{dp}{dx}\right)^2\frac{d^2F.p}{dp^2}\right)+$ec. E siccome il coefficiente di i è $=\frac{dp}{dx}.\frac{dF.p}{dp}$, ne segue che per avere la funzione derivata da y relativamente ad x convien prendere la funzione derivata da y relativamente a p e moltiplicarla per la funzione derivata da p; lo che si esprime così $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dp}.\frac{dp}{dx}$.

Supponghiamo che y sia una funzione di p e q, che noi denoteremo col segno $F.(p,q)$. Nel fare la sostituzione di $x+i$ in luogo di x noi otterremo il medesimo resultato, se faremo in-

sieme la sostituzione nelle due funzioni p e q, o se la faremo prima in p e poi in q. Sostituiamo adunque $x+i$ in luogo di x in p, e la funzione $F.(p,q)$ diventerà $F.(p,q)+i\frac{dp}{dx}\cdot\frac{dF}{dp}+$ec., ove $\frac{dF}{dp}$ è la funzione prima derivata da $F.(p,q)$ presa relativamente a p, considerando q come costante. Adesso nel resultato ottenuto sostituiamo $x+i$ in luogo di x in q, e non tenendo conto che dei termini moltiplicati per i otterremo $F.(p,q)+i\frac{dp}{dx}\cdot\frac{dF}{dp}+i\frac{dq}{dx}\cdot\frac{dF}{dq}$, e quindi

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dF}{dp}\cdot\frac{dp}{dx}+\frac{dF}{dq}\cdot\frac{dq}{dx}.$$

Così pure, se y è funzione di p, q, r rappresentata da $F.(p,q,r)$, troveremo nell'istessa maniera

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dF}{dp}\cdot\frac{dp}{dx}+\frac{dF}{dq}\cdot\frac{dq}{dx}+\frac{dF}{dr}\cdot\frac{dr}{dx};$$

onde si può concludere in generale, che la funzione prima derivata da una funzione composta di più funzioni particolari sarà eguale alla somma delle funzioni derivate prese relativamente a ciascuna di queste particolari funzioni, considerandole come separate e indipendenti tra loro. Con questi principj si potrà trovare la funzione prima derivata da qualunque funzione, qualunque sia il modo della sua composizione, come pure le funzioni derivate degli ordini superiori.

9.

Ma la funzione y può non esser data esplicitamente per x, e solo da una equazione tra x ed y. Per esaminare quest'ultimo caso incominciamo dal riflettere, che se l'equazione $\phi.x=0$ è identica, qualunque sia il valore di x, saranno pure identiche tutte l'equazioni, che nascono da questa, se invece di $\phi.x$ vi si pone una funzione derivata da essa di qualunque ordine. Poichè ponendo $x+i$ in luogo di x l'equazione $\phi.x=0$ diventerà $\phi.x+i\frac{d\phi}{dx}+\frac{i^2}{2}\cdot\frac{d^2\phi}{dx^2}+$ec.$=0$, e dovrà essere identica qualunque sia il valore di i, e perciò i coefficienti delle diverse potenze di i saranno eguali a zero, o sia l'equazioni $\frac{d\phi}{dx}=0$, $\frac{d^2\phi}{dx^2}=0$, ec. saranno tutte identiche.

Data adesso in generale tra x ed y l'equazione $F.(x,y)=0$, mediante la di lei risoluzione sarebbe y una funzione di x, che denoteremo per $f.x$, sostituita la quale in luogo di y la funzione $F.(x,y)$ diventerà una funzione di x sola, che chiameremo $\phi.x$, e sarà $\phi.x=0$ una equazione identica, e perciò sussisteranno l'equazioni $\frac{d\phi}{dx}=0$, $\frac{d^2\phi}{dx^2}=0$, ec. Ora abbiamo $\phi.x=F.(x,f.x)=F.(x,y)$, e siccome y è funzione di x, avremo (8) $\frac{d\phi}{dx}=\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$. Dunque l'equazione $\frac{d\phi}{dx}=0$ ci darà $\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=0$, dalla quale si ricava il valore di $\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}$, ossia la funzione prima derivata da y sarà data per una funzione di x ed y, dalla quale si potrà dedurre la funzione seconda derivata da y, e così in seguito. Inoltre apparisce, che data una equazione qualunque tra x, ed y, l'equazione sussisterà ancora tra le funzioni prime derivate da tutti i suoi termini, come ancora tra le funzioni derivate seconde, ec., e più generalmente sussisterà qualunque combinazione, che si faccia della equazione primitiva, e di quelle che contengono le funzioni derivate. A tutte queste combinazioni daremo il nome d'equazioni derivate, e le chiameremo del primo o second'ordine ec., secondo che conterranno le funzioni derivate prime o seconde, eo.

10.

Nella teoria precedente abbiamo supposto, che qualunque funzione di $x+i$ può esprimersi per una serie della forma

$$F.x+ip+i^2q+i^3r+i^4s+\text{ec.}$$

Nel percorrere le funzioni più semplici abbiamo trovato, che esse erano suscettibili di una simile forma, e dal modo, con cui abbiamo ridotta la ricerca delle funzioni derivate dalle funzioni composte a quella delle funzioni semplici, potrebbe dedursi che la nostra supposizione ha luogo anche riguardo alle funzioni composte. Ma a queste verificazioni indirette sarà bene l'aggiungere un'altra dimostrazione, dalla quale più chiaramente vedrassi, se la regola generale può esser soggetta a qualch'eccezione.

Digitized by Google

Primieramente siccome facendo nella serie $i=0$ essa deve ridursi al primo termine $F.x$, è chiaro che non può contenere potenze negative di i, le quali posta $i=0$ diventerebbero infinite: vediamo adunque se la medesima serie può contenere potenze fratte positive di i. È evidente che, se la funzione $F.x$ non contiene alcun radicale, non ne conterrà nè pure la funzione $F.(x+i)$; onde i radicali di i non possono nascere che da radicali già esistenti nella funzione $F.x$, e la sostituzione di $x+i$ in luogo di x non può nè crescere nè diminuire il numero di questi radicali, nè cangiarne la natura, quando x ed i sono quantità indeterminate. È noto ancora che le funzioni irrazionali hanno tanti valori differenti, quante sono le combinazioni che possono farsi dei valori diversi di ciascun radicale in esse contenuto. Quindi apparisce che, se lo sviluppo della funzione $F(x+i)$ contenesse un termine della forma $ui^{\frac{m}{n}}$, la funzione $F.x$ sarebbe irrazionale, ed avrebbe un certo numero di valori diversi, il quale dovrebb'essere lo stesso per la funzione $F(x+i)$, e pel di lei sviluppo. Ma questo sviluppo, essendo espresso dalla serie $F.x+pi+qi^{a}\ldots\ldots+ui^{\frac{m}{n}}+$ec., conterrebbe tutti i valori di $F.x$ combinati con gli n valori di $i^{\frac{m}{n}}$; e perciò avrebbe più valori lo sviluppo della funzione $F.(x+i)$ di quelli, che ha la medesima funzione: lo che è assurdo.

II.

Il fondamento di questa dimostrazione consiste nel dover'essere il medesimo il numero dei valori differenti tanto della funzione $F.x$, che della funzione $F.(x+i)$. Ciò è vero in generale, quando x ed i si mantengono indeterminate, perchè i radicali contenuti in $F.x$ si trovano egualmente in $F.(x+i)$, se non che nella prima funzione involvono la variabile x, e nella seconda la variabile $x+i$. Ma pnò non esser vero, se x cessa di essere indeterminata, poichè un valore determinato a di x può distruggere qualche radicale nella funzione $F.x$, il quale esisterà sempre nella funzione $F.(x+i)$, perchè la quantità $a+i$ si man-

tiene indeterminata. Quindi la forma da noi attribuita allo sviluppo della funzione $F.(x+i)$, la quale ha sempre luogo quando x è indeterminata, può non convenire alla medesima funzione nel solo caso, in cui x abbia un valore determinato. Esaminiamo più accuratamente questa eccezione alla regola generale.

12.

Un radicale può sparire dalla funzione $F.x$ in due maniere, o perchè divenga nullo il coefficiente del radicale, o perchè si annulli il radicale medesimo. Nel primo caso il radicale può sparire in alcune delle funzioni $\frac{dF}{dx}$, $\frac{d^2F}{dx^2}$, ec., e non nelle altre, poichè il radicale acquistando diversi coefficienti nelle funzioni derivate, questi coefficienti possono o prima o poi divenir tali, che non svaniscano nella supposizione del medesimo valore di x. Nel secondo caso il radicale dovrà sparire in tutte le funzioni derivate all'infinito, perchè si suppone che il radicale medesimo svanisca. Ma siccome il radicale sussiste sempre nella $F.(x+i)$, ove i è una quantità indeterminata, la serie $F.x+i\frac{dF}{dx}+\frac{i^2}{2}\frac{d^2F}{dx^2}+$ec. non rappresenterà esattamente lo sviluppo di $F(x+i)$, che in quanto vi si troverà il medesimo radicale: essa sarà perciò legittima nel primo caso, ma non lo sarà nel secondo.

13.

Sia y una funzione di x, in cui per un dato valore di x sparisca un radicale, il quale però si mantenga in $\frac{dy}{dx}$; è chiaro che in grazia di questo radicale la funzione $\frac{dy}{dx}$ avrà per questo valore di x un maggior numero di valori differenti, che la funzione y, e non potrà perciò la funzione $\frac{dy}{dx}$ esser data da una funzione di x ed y, la quale non contenga questo radicale. Ma se dalla equazione $y=F.x$ si elimina questo radicale, e si rappresenta per $V=0$ l'equazione che ne risulta, e si passa alla equazione prima derivata da questa, essa (9) avrà la forma

$A\frac{dy}{dx}+B=0$, essendo A e B funzioni di x ed y. Questa equazione, che ci dà generalmente il valore di $\frac{dy}{dx}$, quando x è indeterminata, non ce lo potrà dare pel dato valore di x, perchè le quantità A e B non contengono il noto radicale, onde i valori di $\frac{dy}{dx}$ sarebbero dello stesso numero, che quei di y. Ma siccome l'equazione $A\frac{dy}{dx}+B=0$ deve aver luogo anche per questo valore di x, dovrà sussistere indipendentemente dal valore di $\frac{dy}{dx}$, e perciò sarà in questo caso $A=0$ e $B=0$, ed il valore di $\frac{dy}{dx}$ comparirà sotto la forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Non potendosi per questo valore particolare di x ricavare il valore di $\frac{dy}{dx}$ dalla equazione $A\frac{dy}{dx}+B=0$, che è identica, passeremo all'equazione seconda derivata, la quale (8) avrà la forma

$$A\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dA}{dy}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dy}\right)\frac{dy}{dx}+\frac{dB}{dx}=0.$$

Questa ci dà in generale il valore di $\frac{d^2y}{dx^2}$, ma nel caso nostro essendo $A=0$ sparirà il termine che contiene $\frac{d^2y}{dx^2}$, e l'equazione rimanente in $\frac{dy}{dx}$ essendo del secondo grado ci darà due valori di $\frac{dy}{dx}$ corrispondenti a ciascun valore di y. Se anche l'equazione seconda derivata fosse identica pel dato valore di x, converrebbe passare all'equazione terza derivata, e così in seguito.

Qualora per un dato valore di x svanisse un radicale in y e in $\frac{dy}{dx}$ senza svanire in $\frac{d^2y}{dx^2}$, è evidente che bisognerebbe applicare alla ricerca di $\frac{d^2y}{dx^2}$ in questo caso particolare un ragionamento analogo a quello usato di sopra relativamente a $\frac{dy}{dx}$; e così del resto.

Sia per esempio $y=(x-a)\sqrt{(x-b)}$, avremo $\frac{dy}{dx}=\sqrt{(x-b)}+\frac{x-a}{2\sqrt{(x-b)}}$, e nel caso di $x=a$ sparirà il radicale in y, ma non in $\frac{dy}{dx}$, in modo che sarà $y=0$, e $\frac{dy}{dx}=\sqrt{(a-b)}$, cioè il valore di y sarà semplice, e doppio quello di $\frac{dy}{dx}$. Se adesso eliminiamo dalla proposta il radicale $\sqrt{(x-b)}$ riducendola alla forma razionale $y^2-(x-a)^2(x-b)=0$, ne dedurremo l'equazione derivata $2y\frac{dy}{dx}-2(x-a)(x-b)-(x-a)^2=0$, la quale posta $x=a$ si riduce a $0=0$. Perciò passeremo alla equazione derivata seconda $2y\frac{d^2y}{dx^2}+2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2(x-b)-4(x-a)=0$, dalla quale nel caso di $x=a$ otterremo $2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2(a-b)=0$, e quindi $\frac{dy}{dx}=\sqrt{(a-b)}$, come sopra.

14.

Il medesimo metodo si può generalmente applicare alla ricerca del valore di quelle frazioni, che in qualche caso particolare compariscono sotto la forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Sia $\frac{A}{B}$ quella frazione in cui il numeratore ed il denominatore divengono zero quando $x=a$, e ponendola $=y$ avremo l'equazione $By=A$, la quale si verifica nel caso di $x=a$ indipendentemente dal valore di y, che perciò rimane indeterminato. Prendendo l'equazione derivata avremo $B\frac{dy}{dx}+\frac{dB}{dx}y=\frac{dA}{dx}$, e siccome nel caso di $x=a$ svanisce B, avremo in tal caso $y=\frac{\frac{dA}{dx}}{\frac{dB}{dx}}$, e questo sarà il valore cercato della frazione $\frac{A}{B}$. Ma se anche $\frac{dA}{dx}$ e $\frac{dB}{dx}$ svanissero nella medesima supposizione, ponendo $\frac{dA}{dx}$ in luogo di A e $\frac{dB}{dx}$

in luogo di B avremmo nella stessa maniera $y=\frac{\frac{d^2A}{dx^2}}{\frac{d^2B}{dx^2}}$, e così in seguito. Onde in generale il valore della frazione $\frac{A}{B}$ sarà $\frac{\frac{d^nA}{dx^n}}{\frac{d^nB}{dx^n}}$, essendo $\frac{d^nA}{dx^n}$ e $\frac{d^nB}{dx^n}$ le prime funzioni derivate, che non svaniscano insieme allorchè vi si pone $x=a$. Così o prima o poi giungeremo certamente a trovare il vero valore della frazione $\frac{A}{B}$, poichè non è possibile che tutte le funzioni derivate da una funzione di x all'infinito svaniscano per un valore particolare di x. Infatti siccome $F(x+i)=F.x+i\frac{dF}{dx}+\frac{i^2}{2}\frac{d^2F}{dx^2}+$ ec., se nel caso di $x=a$ fossero zero tutte le funzioni $F.x$, $\frac{dF}{dx}$, $\frac{d^2F}{dx^2}$, $\frac{d^3F}{dx^3}$, ec. all'infinito, sarebbe $F.(a+i)=0$, lo che è impossibile, perchè la quantità i è indeterminata.

15.

Ma una funzione $\frac{A}{B}$ comparisce sotto un aspetto indeterminato, anche quando la supposizione di $x=a$ rende infinita tanto A che B. Allora sarà inutile il metodo precedente, perchè tutte le funzioni derivate da A e da B saranno sempre infinite nel caso di $x=a$. Per rinvenire il modo, con cui in simili circostanze dobbiamo condurci, passiamo a considerare quello che succede, quando la supposizione di $x=a$ fà sparire dalla funzione $F.x$ un radicale rendendolo nullo, nel qual caso esso sparisce ancora in tutte le funzioni derivate. Ma siccome questo radicale si mantiene nella funzione $F.(x+i)$, deve aver luogo anche nello sviluppo di essa, e poichè non può involvere la x, conviene che implichi la i; onde lo sviluppo deve contenere delle po-

tenze irrazionali di i. Infatti se $F.x$ contiene la quantità $\sqrt[n]{X}$, ove X è una funzione di x che svanisce quando $x=a$, posto $x+i$ in luogo di x la quantità X diventerà $i\frac{dX}{dx}+\frac{i^2}{2}\frac{d^2X}{dx^2}+$ec., perchè in questo caso è $X=0$, e $\sqrt[n]{X}$ si cangerà in $\sqrt[n]{i}.\sqrt[n]{\left(\frac{dX}{dx}+\frac{i}{2}\frac{d^2X}{dx^2}+\text{ec.}\right)}$; onde $F.(x+i)$ nel caso di $x=a$ conterrà il radicale $\sqrt[n]{i}$, e dovrà ancora contenerlo lo sviluppo di $F.(x+i)$ secondo le potenze di i.

Per vedere che cosa ci dà allora lo sviluppo illegittimo $F.x+i\frac{dF.x}{dx}+\frac{i^2}{2}\frac{d^2F.x}{dx^2}+$ec., si osservi che siccome x ed i entrano egualmente nella funzione $F.(x+i)$, le funzioni derivate da questa saranno le medesime o prese relativamente ad x o relativamente ad i, poichè accrescendo x o i della medesima quantità l'istesso risulterà l'accrescimento di $x+i$. Quindi sarà $\frac{dF.(x+i)}{dx}=\frac{dF.(x+i)}{di}$, $\frac{d^2F.(x+i)}{dx^2}=\frac{d^2F.(x+i)}{di^2}$, ec., e perciò $\frac{dF.x}{dx}=\frac{dF(x+i)}{di}$, $\frac{d^2F.x}{dx^2}=\frac{d^2F(x+i)}{di^2}$, ec., purchè ne'secondi membri di quest'ultime equazioni si faccia $i=0$. Ciò posto, se nel caso di $x=a$ lo sviluppo della funzione $F.(x+i)$ deve contenere un termine Ai^m, ove A è funzione di a, ed m non è un numero intero positivo, è chiaro che gli sviluppi delle funzioni $\frac{dF.(x+i)}{di}$, $\frac{d^2F.(x+i)}{di^2}$, ec. dovranno contenere i termini mAi^{m-1}, $m(m-1)Ai^{m-2}$, ec., e perciò posta $i=0$ le funzioni $F.x$, $\frac{dFx}{dx}$, $\frac{d^2F.x}{dx^2}$, ec. conterranno respettivamente i termini Ao^m, mAo^{m-1}, $m(m-1)Ao^{m-2}$, ec. Se m è un numero qualunque negativo, tutti questi termini riesciranno infiniti: se m è un numero positivo non intero, ed indichiamo per n il numero intero più prossimamente maggiore di m, è evidente che il termine $m(m-1)\ldots(m-n+1)Ao^{m-n}$, e tutti

i seguenti saranno infiniti, e quindi la funzione derivata $\frac{d^n F.x}{dx^n}$ e tutte le seguenti riesciranno infinite. E se $\frac{d^n F.x}{dx^n}$ è la prima funzione che divenga infinita, il vero sviluppo di $F.(x+i)$ dovrà contenere un termine della forma Ai^m, ove m è un numero compreso tra $n-1$ ed n. Onde se tutte le funzioni incominciando dalla prima $F.x$ sono infinite, il vero sviluppo di $F.(x+i)$ non conterrà che potenze negative di i.

16.

In questi casi, ne' quali è erroneo lo sviluppo generale, per ottenere la vera forma dello sviluppo di $F.(x+i)$ bisognerà incominciare dal porre x eguale al dato valore a, e poi sviluppare la funzione $F.(a+i)$, avuto riguardo alle potenze fratte o negative di i in essa contenute. Prendiamo per esempio $F.x=(x-a)\sqrt{(x-b)}$, ove la supposizione di $x=b$ rende nullo il radicale, e la forma generale dello sviluppo di $F.(x+i)$ riesce perciò difettosa. Ed invero si trova $\frac{dF.x}{dx}=\sqrt{(x-b)}+\frac{x-a}{2\sqrt{(x-b)}}$, cioè infinita quando $x=b$, e pel medesimo valore saranno infinite tutte le altre funzioni $\frac{d^2 F.x}{dx^2}$, ec. Adunque il vero sviluppo dovrà contenere un termine i^m, ove m è un numero compreso tra o ed 1: ed infatti se poniamo $x=b+i$, la funzione $F.x$ diventerà $(b-a+i)\sqrt{i}$, cioè $(b-a)i^{\frac{1}{2}}+i^{\frac{3}{2}}$.

Con un metodo simile si troverà il valore di quelle frazioni, le quali si mantengono sempre indeterminate per un dato valore a di x, per quanto si prendano le funzioni derivate dal numeratore e dal denominatore, le quali sono tutte infinite. Si porrà $x=a+i$ in queste frazioni, poi si ridurranno in serie secondo le potenze crescenti di i, e posta $i=o$ il primo termine della serie ci darà il valore della frazione pel caso di $x=a$.

17.

La medesima teoria, che ci ha condotti al generale sviluppo della funzione $F.(x+i)$ secondo le potenze di i, ci sarà utile

ancora per convertire in una serie ordinata per le potenze ascendenti di x una funzione qualunque di x. Infatti l'equazione

$$F.(x+i)=F.x+i\frac{dF.x}{dx}+\frac{i^2}{2}\frac{d^2F.x}{dx^2}+\text{ec.}$$

avrà luogo anche posta $x=0$, purchè in questo caso alcuna delle funzioni $F.x$, $\frac{dF.x}{dx}$, ec. non divenga infinita. Se dunque poniamo F, F', F'', ec. essere i valori di $F.x$, $\frac{dF.x}{dx}$, $\frac{d^2F.x}{dx^2}$, ec. allorchè $x=0$, avremo

$$F.i=F+iF'+\frac{i^2}{2}F''+\frac{i^3}{2.3}F'''+\text{ec.}$$

Adesso potremo prendere x in luogo di i, ed otterremo

$$F.x=F+xF'+\frac{x^2}{2}F''+\frac{x^3}{2.3}F'''+\text{ec.}$$

Se la funzione di x non sarà data esplicitamente, ma dipenderà dalla equazione $F.(x,y)=0$, converrà prima da questa ricavare i valori di $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, col metodo insegnato di sopra (9), poi chiamando Y, Y', Y'', ec. ciò che divengono le quantità y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ec., allorchè vi si pone $x=0$, avremo

$$y=Y+xY'+\frac{x^2}{2}Y''+\frac{x^3}{2.3}Y'''+\text{ec.},$$

ed è chiaro che tante serie otterremo per determinare y, quante sono le radici della equazione $F.(0,y)=0$. In tal modo potremo esprimere il valore di y, quando sarà suscettibile di questa forma, e ci accorgeremo che essa non ha luogo, quando troveremo alcuno dei coefficienti Y, Y', ec. infinito. In questo caso, che corrisponde a quello, in cui il generale sviluppo della funzione $F.(x+i)$ diviene illegittimo, converrà ricorrere ad altri artifizj per trovare la vera forma dello sviluppo di y secondo le potenze di x. Noi abbiamo altrove imperfettamente accennato il metodo da tenersi, parlando degli asintoti delle curve, ma per la di lui importanza l'esporremo adesso con maggior generalità ed accuratezza.

18.

Sia data adunque una equazione tra x, ed y, la quale supponghiamo che sia libera dalle frazioni e dai radicali complessi,

ed abbia perciò la forma

$$Ax^m y^n + A'x^{m'} y^{n'} + A''x^{m''} y^{n''} + \text{ec.} = 0 ,$$

ove A, A', ec. sono quantità costanti, ed m, n, m', n', ec. numeri interi o fratti, positivi o negativi; e si voglia trovare la serie

$$y = ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + ex^\delta + \text{ec.}$$

che rappresenta il valore di y. Questa serie può essere o ascendente, cioè ordinata per le potenze crescenti di x, o discendente o sia ordinata per le potenze decrescenti di x. Noi considereremo il primo caso, perchè da esso potrà facilmente ricavarsi il metodo, che convien tenere, per conseguire una serie discendente.

Facciamo per più semplicità y' eguale a tutti i termini della serie eccettuato il primo, in modo che sia $y = ax^\alpha + y'$, e sostituendo questo valore di y nella equazione proposta otterremo

$$Aa^n x^{m+n\alpha} + A'a^{n'} x^{m'+n'\alpha} + A''a^{n''} x^{m''+n''\alpha} + \text{ec.}$$
$$+ \left(nAa^{n-1} x^{m+(n-1)\alpha} + n'A'a^{n'-1} x^{m'+(n'-1)\alpha} + \text{ec.}\right) y'$$
$$+ \left(\frac{n(n-1)}{2} Aa^{n-2} x^{m+(n-2)\alpha} + \frac{n'(n'-1)}{2} A'a^{n'-2} x^{m'+(n'-2)\alpha} + \text{ec.}\right) y'^2$$
$$+ \text{ec.} = 0 .$$

In questa equazione, che deve essere identica, il primo membro è una serie ascendente secondo le potenze di x; onde se gli esponenti α, β, γ, ec. fossero dati, il paragone dei termini simili ci darebbe il valore dei coefficienti a, b, c, ec.; e segnatamente si otterrebbe il valore di a dal porre $=0$ la somma dei coefficienti dei primi termini della equazione precedente, cioè di quelli che contengono la più piccola potenza di x. Ma come potremo sapere quale sia la più piccola potenza di x, quando a è indeterminata? Converrà determinarla in modo, che almeno in due termini della equazione x abbia il medesimo esponente, il quale sia insieme minore degli esponenti di tutti gli altri termini; acciò dal confronto di due termini simili si possa dedurre il valore del coefficiente a. E quì si rifletta che le più piccole potenze di x non potranno trovarsi in quei termini, che contengono y', perchè y' comprende per ipotesi potenze superiori ad x^α. Onde in questa ricerca dovremo aver riguardo a quei

soli termini, che sono indipendenti da y', cioè a quei soli che nascono dal sostituirsi nella proposta ax^a in luogo di y. Uno qualunque di questi termini dovrà paragonarsi con ciascuno degli altri, e dovranno ritenersi quei valori di a, i quali rendono in due o più termini gli esponenti eguali, e questi minori degli esponenti degli altri termini. Per diminuire la lunga molestia di questi confronti, molti dei quali riesciranno inutili, noi esporremo un bel compendio di calcolo, il quale si deve al sommo Geometra *Lagrange*.

Data la serie degli esponenti

$$m+na,\ m'+n'a,\ m''+n''a,\ m'''+n'''a,\ \text{ec.}$$

si tratta di determinare il valore di a in modo, che due o più termini della serie siano eguali tra loro e minori di tutti gli altri. Se la n fosse eguale in due termini, converrebbe ritenere il termine in cui la m corrispondente è minore, e rigettar l'altro in cui la m è maggiore, perchè questo termine è sempre più grande di quello, qualunque sia il valore di a. I numeri n, n', n'', ec. essendo così tutti diversi, suppongo che i termini della serie siano in modo disposti, che questi numeri n, n', n'' ec. formino una serie crescente, ove i numeri negativi devono considerarsi come più piccoli dei positivi, e tanto più piccoli, quanto prescindendo dal segno sarebbero maggiori; di maniera che per esempio si deve scrivere -7 prima di -3, e -3 prima di 2. Ciò posto si paragoni il primo termine della serie con ciascuno dei seguenti, e si otterranno per a i valori $\frac{m-m'}{n'-n}$, $\frac{m-m''}{n''-n}$, $\frac{m-m'''}{n'''-n}$, ec., i quali per più semplicità chiameremo a', a'', a''', ec.; onde sarà $m-m'=(n'-n)a'$, $m-m''=(n''-n)a''$, $m-m'''=(n'''-n)a'''$, ec. Avremo adunque

$m'+n'a=m+na+m'-m+(n'-n)a=m+na+(n'-n)(a-a')$,
$m''+n''a=m+na+(n''-n)(a-a'')$, $m'''+n'''a=m+na+(n'''-n)(a-a''')$, ec.

Perciò, se chiamiamo π il primo termine della serie, essa potrà porsi sotto la forma

$$\pi,\ \pi+(n'-n)(a-a'),\ \pi+(n''-n)(a-a''),\ \pi+(n'''-n)(a-a'''),\ \text{ec.}$$

Adesso si vede chiaramente, che posta a eguale alla più grande delle quantità a', a'', a''', ec., che sia per esempio a''', il termine corrispondente a questa quantità a''' cioè il quarto sa-

rà eguale al primo e minore di tutti gli altri, perchè i numeri $n'-n$, $n''-n$, ec. sono tutti positivi. Se delle quantità a', a'', ec. due o più fossero eguali tra loro, e maggiori di tutte le altre, posta a eguale a queste quantità, si avrebbero altrettanti termini eguali al primo π e minori di tutti gli altri. Trovato così un valore soddisfaciente di a, vediamo se ve ne sono altri, che abbiano le medesime condizioni.

Primieramente non potrà a avere un valore maggiore della più grande delle quantità a', a'', ec., perchè sarebbe in tal caso il solo primo termine minore di tutti gli altri, giacchè tanto i numeri $n'-n$, $n''-n$, ec., che le quantità $a-a'$, $a-a''$, ec. riescirebbero tutte positive. Non potrà dunque a avere che un valore minore della più grande delle quantità a', a'', ec., la quale come sopra suppongo essere a'''; in modo che, se vi sono più quantità tra loro eguali e più grandi delle altre, sia a''' l'ultima, cioè la più rimota dal principio della serie. Ma se a è $<a'''$, è facile il vedere che il termine corrispondente ad a''' è minore di tutti i precedenti, poichè la quantità $(n'''-n)(a-a''')$ è negativa, e le quantità corrispondenti negli altri termini o sono positive, o se alcuna di esse, per esempio $(n'-n)(a-a')$ è negativa, se si prescinde dal segno, è però minore di $(n'''-n)(a-a''')$, giacchè $n'-n<n'''-n$, ed $a'-a<a'''-a$, onde $\pi-(n'-n)(a'-a)>\pi-(n'''-n)(a'''-a)$. Pertanto i più piccoli termini, se esistono, dovranno cercarsi in quello che corrisponde ad a''', e nei seguenti. Da tutto ciò si deduce la regola quì sotto descritta.

Si uguagli il primo termine della serie a ciascuno dei seguenti, e si ricavi il valore di a da ciascuna di quest'equazioni; il più grande dei valori di a risolverà il problema, ed i termini che formano l'equazione, dalla quale questo valore è dedotto, riesciranno i più piccoli. Adesso ponendo da parte tutti i termini della serie, che precedono l'ultimo di quelli, i quali sono riesciti i più piccoli, si uguagli di nuovo quest'ultimo termine a ciascuno dei seguenti, ed il più grande tra i valori di a, che se ne dedurranno, ci darà una nuova soluzione. E così ripetendo la medesima operazione, finchè si giunga all'ultimo termine della serie, otterremo in tal modo tutti i valori soddisfacienti di a.

Sia data per esempio la serie

$$a+3,\ 2a+1,\ 4a-3,\ 5a+2,\ 6a-4,\ 7a-2,\ 8a-3.$$

Uguagliando il primo termine a ciascuno degli altri avremo per a i valori $2, 2, \frac{1}{4}, \frac{7}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}$, il maggiore dei quali è 2, e risulta dal paragone del primo termine col secondo e col terzo. Uguaglieremo pertanto il terzo termine a ciascuno dei seguenti, ed otterremo per a i valori $-5, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 0$, dei quali il più grande è $\frac{1}{2}$, e nasce dal paragone del terzo termine col quinto. Adesso eguaglieremo il quinto termine ai due seguenti, e ne ricaveremo per a i valori $-2, -\frac{1}{2}$, dei quali $-\frac{1}{2}$ è il maggiore, e risulta dal paragone del quinto termine coll'ultimo. Dunque l'operazione è terminata, ed i valori soddisfacienti di a sono $2, \frac{1}{2}$, e $-\frac{1}{2}$. Sostituiti questi valori la serie diventa nel primo caso $5, 5, 5, 12, 8, 12, 13$, nel secondo $\frac{7}{2}, 2, -1, \frac{9}{2}, -1, \frac{3}{2}, 1$, e nel terzo $\frac{5}{2}, 0, -5, -\frac{1}{2}, -7, -\frac{11}{2}, -7$.

Determinato l'esponente a ed il coefficiente a nel primo termine ax^a della serie, che rappresenta il valore di y, ponghiamo $y=ax^a+y'$, ed avremo una nuova equazione tra y' ed x. Mettiamo in questa $y'=bx^\beta$, e col medesimo metodo cercando il valore di β e quello di b otterremo il secondo termine del valore di y. Ove conviene avvertire, che non dobbiamo ammettere che quei valori di β, i quali sono maggiori di a, acciò la serie $ax^a+bx^\beta+$ec. sia ascendente, come l'abbiamo supposta. Nell'istesso modo ponendo $y'=bx^\beta+y''$, e così in seguito, giungeremo a determinare gli altri termini della serie.

Se la serie, che rappresenta il valore di y, dovess'essere discendente, è chiaro che dopo la sostituzione nella proposta di ax^a in luogo di y converrebbe determinare a in modo, che in due o più termini l'esponente della x fosse eguale, e insieme

maggiore di tutti gli altri esponenti. Onde riandando le cose precedenti facilmente vedremo, che in questo caso dobbiamo tra le quantità, che abbiamo chiamate a', a'', a''', ec. scegliere la più piccola, e così pure in ciascuna nuova serie prender sempre il più piccolo dei valori di a.

Sia data per esempio l'equazione $1+xy^2-y^3=0$, e cerchiamo primieramente il valore di y per una serie ascendente. Ponendo $y=ax^a$ avremo gli esponenti 0, $2a+1$, $3a$, e prendendo il maggior valore di a, che nasce dal paragone del primo termine col terzo, troveremo $a=0$, ed a dovrà determinarsi dalla equazione $1-a^3=0$, e quindi sarà $a=1$, perchè le altre due radici di questa equazione sono immaginarie. Trovato il primo termine 1 della serie facciamo $y=1+y'$, ed otterremo la trasformata

$$x-3y'+2xy'-3y'^2+xy'^2-y'^3=0.$$

Ponendo in questa $y'=bx^\beta$ dovremo considerare i soli esponenti 1, β, 2β, 3β trascurati gli altri, che sono maggiori dei precedenti, qualunque sia il valore di β. Troveremo per β i due valori 1 e 0, dei quali però non ammetteremo il secondo, perchè β dev'essere $>a$. Sarà dunque $\beta=1$, e b ci sarà data dall'equazione $1-3b=0$, cioè sarà $b=\frac{1}{3}$, ed il secondo termine della serie $\frac{x}{3}$. Facendo $y'=\frac{x}{3}+y''$ avremo la seconda trasformata

$$\frac{x^2}{3}+\frac{2x^3}{27}-3y''+\frac{x^2y''}{3}-3y''^2-y''^3=0,$$

nella quale ponendo $y''=cx^\gamma$, e paragonando gli esponenti troveremo per γ i due valori 2 e 0, dei quali ammetteremo il solo primo per la ragione addotta di sopra, ed il valore corrispondente di c sarà $\frac{1}{9}$, e perciò $\frac{x^2}{9}$ il terzo termine della serie. Continuando le operazioni avremo gli altri termini della serie, e troveremo

$$y=1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{9}+\frac{2x^3}{81}+\frac{4x^4}{243}+\text{ec.}$$

Passiamo a cercare le serie discendenti, che esprimono il valore di y, e ponendo $y=ax^a$ dovremo esaminare gli esponenti

0, $2a+1$, $3a$, e prendendo i più piccoli valori di a che nascono dal loro paragone troveremo $a=-\frac{1}{2}$, ed $a=1$, i quali valori considereremo separatamente. Incominciando dal secondo dovremo determinare a dalla equazione $a^2-a^3=0$, cioè sarà $a=1$, ed il primo termine della serie $=x$. Facendo $y=x+y'$ avremo la trasformata

$$1-x^2y'-2xy'^2-y'^3=0,$$

e ponendo $y'=bx^\beta$ troveremo per β i valori -2 ed 1, dei quali non ammetteremo il secondo, perchè non sarebbe $\beta<a$, come convien che sia, acciò la serie riesca discendente. Sarà dunque $\beta=-2$, e $b=1$; onde facendo $y'=x^{-2}+y''$ otterremo la seconda trasformata

$$2x^{-3}+x^{-6}+x^2y''+4x^{-1}y''+3x^{-4}y''+2xy''^2+3x^{-2}y''^2+y''^3=0,$$

nella quale ponendo $y''=cx^\gamma$ consideriamo gli esponenti -3, $\gamma+2$, $2\gamma+1$, 3γ trascurati gli altri, perchè riescono sempre più piccoli, qualunque sia il valore di γ. Dal confronto dei coefficienti ammessi deduciamo per γ i valori -5, e $\frac{2}{3}$, dei quali per la ragione addotta di sopra ritenghiamo il primo solamente, ed il valore corrispondente di c essendo -2, il terzo termine della serie sarà $-2x^{-5}$. Nella medesima maniera troveremo gli altri termini, ed il valore di y riescirà

$$y=x+x^{-2}-2x^{-5}+7x^{-8}-30x^{-11}+\text{ec.}$$

Se vogliamo prevalerci dell'altro valore di a, cioè $-\frac{1}{2}$, dovremo determinare a dalla equazione $1+a^2=0$, la quale ha le radici immaginarie, onde la serie riescirebbe immaginaria. Il medesimo caso può aver luogo in un termine assai rimoto dal primo; onde apparisce con quanta cautela dobbiamo servirci di quelle serie, nelle quali non si conosce la legge generale dei termini, ma solo alcuni di essi. Poichè una serie, che in principio comparisce reale, può nel progresso de' suoi termini divenire immaginaria. Per tal motivo abbiamo fatto osservare al num. 3, che i coefficienti B, C, D, ec. erano tutti determinabili per mezzo di equazioni del primo grado; la qual riflessione ci assi-

curava, che niuno di quei coefficienti riescirebbe immaginario, e la serie in conseguenza sarebbe reale.

Data una equazione tra x ed y, nella quale per un dato valore a di x quello di y divenga indeterminato, si potrà usare il metodo precedente per determinarlo. Si ponga nella equazione proposta $a+i$ in luogo di x, poi si svolga y in una serie ascendente per le potenze di i, ed il primo termine di questa serie, posta $i=0$ ci darà il valore cercato di y. Questo metodo si potrà qualche volta con vantaggio adoprare, quando le funzioni derivate da y saranno nel caso di $x=a$ espresse per una frazione, nella quale il numeratore ed il denominatore svaniscono; ma sarà il solo che possa usarsi, allorchè il numeratore ed il denominatore della frazione esprimente il valore di y nel caso particolare di $x=a$ diventeranno ambedue infiniti.

19.

Da questa digressione, alla quale ha data origine la particolare eccezione, che soffre il generale sviluppo della funzione $F.(x+i)$, ritorniamo al calcolo delle funzioni derivate. Abbiamo veduto, che data qualnnque funzione y di x, o qualunque equazione tra x e y, si può sempre con regole molto semplici ottenere le funzioni derivate e l'equazioni derivate di qualunque ordine. Questo calcolo oltre a servire allo sviluppo delle funzioni in serie, ha molti usi importanti nella teoria delle curve. Ma prima di passare ad esporli, è necessario stabilire che nello sviluppo della funzione y, allorchè vi si pone $x+i$ in luogo di x, cioè nella serie

$$y+i\frac{dy}{dx}+\frac{i^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{i^3}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3}+\text{ec.}$$

si potrà sempre prendere i così piccola, che prescindendo dal segno un termine qualunque superi la somma di tutti i seguenti: così per esempio potrà rendersi $i\frac{dy}{dx}>\frac{i^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{i^3}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3}+\text{ec.}$, o sia $\frac{dy}{dx}>i\left(\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{i}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3}+\text{ec.}\right)$. Quando il precedente sviluppo ha luogo, abbiamo veduto che niuna delle quantità $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ec. diventa infinita, ma sono tutte finite; dunque la se-

rie $i\left(\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{i}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3}+\text{ec.}\right)$ sarà zero quando $i=0$, e crescendo i per i gradi insensibili essa pure anderà crescendo per gradi insensibili. Ciò posto, se per un dato valore di i quella serie è maggiore di $\frac{dy}{dx}$, diminuendo continuamente il valore di i essa pure diminuirà continuamente fino a divenire zero, onde vi sarà un valore di i, che la renderà minore di $\frac{dy}{dx}$, e gli altri valori di i più piccoli di questo produrranno il medesimo effetto. Lo stesso ragionamento potrà applicarsi ad ogni altro termine della serie proposta, ed a qualunque serie ascendente secondo le potenze di i, ove potrà prendersi i così piccola; che il primo termine superi la somma di tutti i seguenti, e quindi il valore di tutta la serie abbia il medesimo segno del primo termine.

20.

Con questo principio potremo render più rigoroso il discorso da noi usato nel Calcolo Differenziale per determinare il massimo o il minimo valore di una funzione di x. Sia y questa funzione, e si cangi in y' ed y'', allorchè x diventa $x+i$ ed $x-i$; avremo

$$y'=y+i\frac{dy}{dx}+\frac{i^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{i^3}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3}+\text{ec.}$$

$$y''=y-i\frac{dy}{dx}+\frac{i^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{i^3}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3}+\text{ec.}$$

Ora potendosi in queste due serie prendere i così piccola, che il termine $i\frac{dy}{dx}$ superi la somma di tutti i seguenti, è chiaro che finchè $\frac{dy}{dx}$ non è zero, le due quantità y' ed y'' saranno una maggiore, l'altra minore di y, e perciò y non potrà essere nè massima nè minima. Ma se $\frac{dy}{dx}=0$, potrà con un valore conveniente di i il termine $\frac{i^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2}$ rendersi maggiore di tutti i seguenti presi insieme, e le quantità y' ed y'' saranno ambedue maggiori o ambedue minori di y, secondo che $\frac{d^2y}{dx^2}$ sarà positiva o nega-

tiva, e perciò y riescirà un minimo o un massimo. Quindi per trovare il valore di x, che rende y un massimo o un minimo, si dovrà porre $\frac{dy}{dx}=0$, ed il valore di x ricavato da questa equazione renderà la funzione y massima o minima, secondo che nel medesimo caso la funzione $\frac{d^2y}{dx^2}$ riescirà negativa o positiva. Se il medesimo valore di x rendesse nulla anche la funzione $\frac{d^2y}{dx^2}$, è evidente che non si avrebbe nè massimo nè minimo finchè non fosse nulla la funzione $\frac{d^3y}{dx^3}$; ma se anche questa fosse zero, dipenderebbe dal segno di $\frac{d^4y}{dx^4}$, che y fosse massima o minima: e così in seguito.

21.

Per determinare le tangenti delle curve adotteremo il principio stabilito dagli antichi Geometri, secondo il quale riguardavano una retta come tangente di una curva in un punto di essa, quando per questo punto non poteva condursi alcun'altra retta, che cadesse tra la prima retta e la curva. Infatti data una secante, che tagli la curva in due punti, per quanto sia piccola la porzione di curva intercetta, è facile il concepire che per uno dei punti, nei quali la curva è tagliata, si possono tirare infinite altre secanti, che passino tra la curva e la prima secante. Sia data adunque (Fig. 1) una curva riferita all'asse AP per mezzo delle coordinate $AP=x$ e $PM=y$, e ponghiamo che pel punto M passi una retta MR riferita ai medesimi assi per mezzo delle coordinate p e q, e sia $q=ap+b$ l'equazione di questa retta. Siccome il punto M è comune alla retta ed alla curva, se faremo $p=x$, dovrà diventare $q=y$; onde sarà $y=ax+b$, dalla qual'equazione riguardando x ed y come date potremo determinare una delle costanti b, e fatto ciò l'equazione di qualunque retta, che passa pel punto M sarà $q=a(p-x)+y$.

Adesso per vedere quanto la curva e la retta differiscono nel loro corso, accresciamo di $PQ=i$ l'ascissa AP, ed avremo nella curva l'ordinata $QN=y+i\frac{dy}{dx}+\frac{i^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{i^3}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3}+$ec., e

nella retta l'ordinata $QR=a(x+i)+b=y+ai$. Onde la distanza tra i punti N ed R della curva e della retta corrispondenti alla medesima ascissa AQ, cioè la retta RN sarà $=i\left(\frac{dy}{dx}-a\right)+\frac{i^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{i^3}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3}+$ec. Siccome può prendersi un valore di i così piccolo, che renda il primo termine di questa serie maggiore della somma di tutti gli altri, è chiaro che avremo un maggiore avvicinamento tra la retta e la curva, se mancherà questo primo termine. Sarà in tal caso $a=\frac{dy}{dx}$, e l'equazione della retta diventerà $q=(p-x)\frac{dy}{dx}+y$.

L'avvicinamento della retta così determinata alla curva sarà tale, che non potrà pel punto M condursi un'altra retta, che passi tra la curva e la prima retta. Sia infatti $s=Ar+B$ l'equazione riferita ai medesimi assi di un'altra retta MS, che passi pel punto M, e posta $r=x$ dovrà anche in questa essere $s=y$, cioè $y=Ax+B$. La distanza RS tra le due rette sarà $(A-a)i$, mentre la distanza RN è $=\frac{i^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{i^3}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3}+$ec. Ora si può prendere un valore di i tale, che sia $(A-a)i$ maggiore della serie $\frac{i^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{i^3}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3}+$ec.; dunque sarà RS maggiore di RN, e quindi la retta MS non potrà passare tra la curva e la retta MR. Pertanto questa retta MR sarà la tangente della curva al punto M.

Nella equazione $q=ap+b$ la quantità a esprime la tangente trigonometrica dell'angolo, che la retta forma con l'asse delle ascisse, e $-\frac{b}{a}$ è l'ascissa corrispondente all'incontro della retta col medesimo asse. Sarà dunque $\frac{dy}{dx}$ la tangente dell'angolo MTP, che la tangente della curva forma coll'asse AP, e la retta $AT=-\frac{y-x\frac{dy}{dx}}{\frac{dy}{dx}}$, e perciò la sottangente $PT=AP-AT=\frac{y}{\frac{dy}{dx}}$.

22.

Ripigliamo l'equazione $s=Ar+B$ della retta MS, ove A è eguale alla tangente dell'angolo MVP. Siccome la tangente dell'angolo MTP è $=a$, sarà $\frac{A-a}{1+Aa}$ la tangente dell'angolo VMT: onde se vogliamo che quest'angolo sia retto, nel qual caso la retta MS diventerà *normale* alla curva, sarà $1+Aa=0$, e quindi $A=-\frac{1}{a}=-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$. L'altro termine B si determinerà dalla equazione $Ax+B=ax+b$, la quale sostituiti i valori diventa $-x+B\frac{dy}{dx}=y\frac{dy}{dx}$, e ci dà $B=\frac{x+y\frac{dy}{dx}}{\frac{dy}{dx}}$. Sarà dunque $s\frac{dy}{dx}=x+y\frac{dy}{dx}-r$ l'equazione della normale, $x+y\frac{dy}{dx}$ la distanza dell'incontro della normale coll'asse dell'ascisse dalla origine delle medesime, ed $y\frac{dy}{dx}$ la subnormale.

23.

La retta RN essendo $=QN-QR$ avrà un valore positivo o negativo, secondo che l'ordinata della curva sarà maggiore o minore della ordinata della tangente. Nel primo caso la curva MN sarà situata sopra la tangente, e perciò volterà la sua convessità all'asse AP, nel secondo la curva sarà posta al disotto della tangente, e volgerà all'asse la sua concavità. Ma nelle vicinanze del punto M il segno della retta RN dipende da quello del primo termine $\frac{i^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2}$ del suo sviluppo; dunque la curva sarà convessa o concava verso l'asse delle ascisse, secondo che la funzione $\frac{d^2y}{dx^2}$ sarà positiva o negativa. Abbiamo supposta y positiva, e facilmente si vede che il contrario avverrebbe, se y fosse negativa; onde possiamo generalmente stabilire che la curva volgerà all'asse delle ascisse la sua convessità o concavità, secondo che la funzione $y\frac{d^2y}{dx^2}$ sarà positiva o negativa.

Se M è un punto di flesso contrario (Fig. 2), la curva da una parte di questo punto sarà concava, dall'altra convessa; dunque il valore di RN dovrà cangiar segno, quando in luogo di i vi si pone $-i$. Ora ciò non potrà accadere, finchè nel valore di RN sussisterà il primo termine $\frac{i^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2}$, che non cangia segno allorchè i diviene negativa, e dal quale in vicinanza del punto M dipende il segno della retta RN. Quindi nel punto di flesso contrario dovrà essere $\frac{d^2y}{dx^2}=0$, poichè allora essendo $RN=\frac{i^3}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{i^4}{2.3.4}\frac{d^4y}{dx^4}+$ec., e potendosi i prender così piccola, che il segno del primo termine $\frac{i^3}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3}$ sia quel medesimo di tutta la serie, RN cangerà segno quando i diventerà negativa.

24.

Se M (Fig. 3) è un punto di regresso della prima specie, la tangente MR caderà tra i due rami MN, MN' della curva, e la retta RN avrà due valori uno positivo, e l'altro negativo. In tal caso lo sviluppo $\frac{i^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{i^3}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3}+$ec. dando un solo valore di RN diventa difettoso. Per trovare il vero sviluppo sia a il valore di x corrispondente al punto di regresso, e ponendo $a+i$ in luogo di x svolgiamo il valore di RN in una serie ascendente secondo le potenze di i, e sia

$$RN=ai^{\alpha}+bi^{\beta}+ci^{\gamma}+\text{ec.}$$

Siccome si può prendere i così piccola, che il primo termine ai^{α} superi la somma di tutti gli altri, bisognerà che l'esponente α sia un numero fratto col denominatore pari, affinchè RN abbia due valori uno positivo e l'altro negativo, e diventi immaginaria se si varia il segno della i. Questa è la condizione necessaria, perchè il punto M corrispondente all'ascissa $x=a$ sia un punto di regresso della prima specie. Ora se chiamiamo y' il valore di y, quando x diviene $x+i$, abbiamo, nel caso di $x=a$. $NR=y'-y-i\frac{dy}{dx}=ai^{\alpha}+bi^{\beta}+$ec., e prendendo la funzione

seconda derivata per rapporto ad i ne deduciamo $\frac{d^2y'}{di^2}=a(a-1)ai^{a-2}$ +ec. Ma (15), posta $i=0$, $\frac{d^2y'}{di^2}$ diventa il valore di $\frac{d^2y}{dx^2}$: dunque $\frac{d^2y}{dx^2}$ nel caso di $x=a$ avrà per primo termine del suo sviluppo $a(a-1)ao^{a-2}$, il quale a motivo di a numero rotto sarà zero o infinito; e se questo primo termine è zero, lo saranno tutti gli altri, perchè la serie è ascendente. Pertanto nel punto di regresso della prima specie la funzione $\frac{d^2y}{dx^2}$ diventa nulla o infinita.

Se lo sviluppo di NR contenesse esponenti fratti col denominatore pari, ma l'esponente a del primo termine non fosse tale, NR avrebbe due valori, ma questi sarebbero ambedue del medesimo segno a motivo del primo termine, che può rendersi maggiore di tutti gli altri, e che ha un solo segno. In tal caso i due rami di curva caderebbero dalla medesima parte della tangente, ed il punto M (Fig. 4) sarebbe un punto di regresso della seconda specie.

25.

Lo sviluppo generale di NR può anche divenire erroneo, allorchè la funzione y contenga un radicale di esponente dispari, il quale diventi nullo nel caso di $x=a$. Allora se nel vero sviluppo di RN per questo caso di $x=a$ il primo termine ai^a sarà tale, che a sia un numero intero dispari, o un numero fratto col numeratore ed il denominatore dispari, il valore di RN cangerà segno allorchè i diventerà negativa, e perciò il punto corrispondente all'ascissa $x=a$ sarà un punto di flesso contrario. Se si osserva, che l'esponente a del primo termine, allorchè è un numero intero positivo, dev' esser maggiore dell' unità, poichè nel valore di $RN=y'-y-i\frac{dy}{dx}$ si sono tolti con la sottrazione del termine $i\frac{dy}{dx}$ tutti quei termini moltiplicati per i, che vi aveva introdotti y', anche quì si potrà dimostrare come sopra, che il valore di $\frac{d^2y}{dx^2}$ diventa nel caso di

$x=a$ o nullo o infinito. Queste riflessioni servono di snpplemento a ciò che abbiamo detto di sopra (23), e c'insegnano a trovare anche quei punti di flesso contrario, relativamente ai quali è illegittimo il generale sviluppo di RN.

26.

Per trovare adunque i punti di flesso contrario o di regresso della prima specie dovremo porre $\frac{d^2y}{dx^2}$ eguale a zero o all'infinito. Sia a uno dei valori di x, che si ricavano da queste supposizioni, e ponendo nel valore di RN a in luogo di x si svolga RN in una serie ascendente secondo le potenze di i, e la forma di questo sviluppo ci farà conoscere se il punto in questione è un flesso contrario o un regresso. Abbiamo fin quì supposto che $\frac{dy}{dx}$ non sia infinita; se $\frac{dy}{dx}$ fosse infinita, sarebbe tale anche $\frac{d^2y}{dx^2}$, onde la regola data comprende ancora questo caso. Ma per giudicare della qualità del punto, in cui ciò avviene, bisognerà esaminare l'andamento della curva in vicinanza di questo punto.

Nei punti di regresso della seconda specie la funzione $\frac{d^2y}{dx^2}$ può essere zero o infinita, e può non essere nè l'uno nè l'altro; e questo ultimo caso avviene quando l'esponente a del primo termine dello sviluppo di RN è $=2$. E quì merita di essere osservato come quella eccezione, la quale in alcuni casi soffre il generale sviluppo della funzione y', è non solo una necessaria conseguenza delle varie affezioni delle curve, ma ci somministra ancora il solo mezzo, di cui possiamo valerci, per ben conoscerle.

Data per esempio l'equazione $\left(y-b-(x-a)^m\right)^p=(x-a)^{n+p}$, ove m, n, p sono numeri interi positivi ed m diverso dall'unità, e la frazione $\frac{n}{p}$ è ridotta ai minimi termini, si cerchi di quale specie è quel punto della curva, che appartiene all'ascissa $x=a$. Posta l'equazione sotto la forma

$y=b+(x-a)^m+(x-a)^{\frac{n}{p}+1}$ sarà $y'=b+(x-a+i)^m+(x-a+i)^{\frac{n}{p}+1}$, $\frac{dy}{dx}=m(x-a)^{m-1}+\frac{n+p}{p}(x-a)^{\frac{n}{p}}$; onde il valore di RN, cioè $y'-y-i\frac{dy}{dx}$ nel caso di $x=a$ sarà $i^m+i^{\frac{n}{p}+1}$. Pertanto se p è un numero pari, si avrà un punto di regresso, e questo della prima specie se $\frac{n}{p}<m-1$, della seconda se $m<\frac{n}{p}+1$. Se p è un numero dispari, si avrà un punto di flesso contrario quando $\frac{n}{p}+1<m$, purchè n sia pari; o quando m essendo dispari sarà $m<\frac{n}{p}+1$. Troveremo tutti questi punti facendo $\frac{d^2y}{dx^2}$ o zero o infinita, ad eccezione del punto di regresso della seconda specie, quando $m=2$. Se fosse $m=1$, il valore di RN si ridurrebbe al solo termine $i^{\frac{n}{p}+1}$, ed all'esponente di questo termine dovrebbe riportarsi il giudizio della qualità del punto in questione.

27.

Il medesimo metodo, col quale abbiamo determinate le tangenti delle curve, potrà servirci per la ricerca di quelle curve, che hanno un punto di contatto con una curva data. Sia $y=F.x$ l'equazione di una curva data, e $q=f\,p$ l'equazione di un'altra curva riferita ai medesimi assi. Perchè queste due curve abbiano un punto comune corrispondente all'ascissa x, bisogna che posta $p=x$ sia $q=y$, e quindi $f.x=F.x$. Questa è la condizione necessaria, perchè le due curve abbiano un punto comune, ma gli altri punti saranno in ambedue diversi. Adesso per vedere quanto una curva differisca dall'altra, ponghiamo $x+i$ in luogo di x, e le funzioni $F.(x+i)$, $f.(x+i)$ rappresenteranno le ordinate corrispondenti nelle due curve alla medesima ascissa $x+i$, e la differenza di queste funzioni ci darà la distanza, che hanno tra loro i punti delle due curve relativi all'ascissa $x+i$. Se chia-

miamo D questa distanza, e ci ricordiamo che $F.x=f.x$, svolgendo in serie le funzioni $F.(x+i)$ e $f.(x+i)$ avremo

$$D=i\left(\frac{dF}{dx}-\frac{df}{dx}\right)+\frac{i^2}{2}\left(\frac{d^2F}{dx^2}-\frac{d^2f}{dx^2}\right)+\frac{i^3}{2.3}\left(\frac{d^3F}{dx^3}-\frac{d^3f}{dx^3}\right)+\text{ec.}$$

Si vede in generale, che questa distanza sarà tanto più piccola, e perciò le curve tanto più si avvicineranno, quanti più termini svaniranno nel principio della serie. Ma per conoscer meglio questi diversi gradi di avvicinamento consideriamo un'altra curva, che abbia per equazione $s=\phi.r$ tra le coordinate r ed s riferite ai medesimi assi, e supponghiamo che anche questa abbia un punto comune con le altre due corrispondente alla medesima ascissa x, in modo che sia $\phi.x=F.x=f.x$. Chiamando Δ la distanza tra i punti della prima curva e della terza corrispondenti alla medesima ascissa $x+i$ avremo

$$\Delta=i\left(\frac{dF}{dx}-\frac{d\phi}{dx}\right)+\frac{i^2}{2}\left(\frac{d^2F}{dx^2}-\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)+\frac{i^3}{2.3}\left(\frac{d^3F}{dx^3}-\frac{d^3\phi}{dx^3}\right)+\text{ec.}$$

Supponghiamo adesso che le prime due curve sian tali, che si abbia $\frac{dF}{dx}=\frac{df}{dx}$; il valore di D diventerà

$$D=\frac{i^2}{2}\left(\frac{d^2F}{dx^2}-\frac{d^2f}{dx^2}\right)+\frac{i^3}{2.3}\left(\frac{d^3F}{dx^3}-\frac{d^3f}{dx^3}\right)+\text{ec.}$$

ed è facile il vedere che, se $\frac{d\phi}{dx}$ non è $=\frac{dF}{dx}$, si potrà prendere i così piccola, che sia $\Delta>D$. Ciò infatti si riduce a prendere i tale, che nella serie

$$\frac{dF}{dx}-\frac{d\phi}{dx}+\frac{i}{2}\left(\frac{d^2f}{dx^2}-\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)+\frac{i^2}{2.3}\left(\frac{d^3f}{dx^3}-\frac{d^3\phi}{dx^3}\right)+\text{ec.}$$

il primo termine $\frac{dF}{dx}-\frac{d\phi}{dx}$ superi la somma di tutti i seguenti, lo che è sempre possibile, e trovato un valore di i che soddisfaccia a questa condizione, essa avrà luogo anche per tutti i valori più piccoli di i. Dunque la terza curva non potrà passare trá le due prime, se in essa non sarà $\frac{d\phi}{dx}=\frac{dF}{dx}$.

Se non solo sarà $\frac{df}{dx}=\frac{dF}{dx}$, ma ancora $\frac{d^2f}{dx^2}=\frac{d^2F}{dx^2}$, in modo che il valore di D divenga

$$D=\frac{i^3}{2.3}\left(\frac{d^3F}{dx^3}-\frac{d^3f}{dx^3}\right)+\frac{i^4}{2.3.4}\left(\frac{d^4F}{dx^4}-\frac{d^4f}{dx^4}\right)+\text{ec.}$$

si dimostrerà nella medesima maniera, che quando non sia $\frac{d\phi}{dx}=\frac{dF}{dx}$, ed insieme $\frac{d^2\phi}{dx^2}=\frac{d^2F}{dx^2}$, si potrà prendere un valore di i così piccolo, che Δ riesca maggiore di D; e così in seguito.

Si può adunque in generale concludere che, data una curva qualunque se un'altra curva avrà un punto comune con la prima, cioè se le loro ordinate saranno eguali per una medesima ascissa, e se di più le funzioni prime derivate da queste ordinate saranno esse pure eguali, in tal caso sarà impossibile che un' altra curva condotta pel punto comune passi tra le due prime, a meno che la funzione prima derivata dall' ordinata comune non sia anche in questa terza curva la medesima. E se nelle due prime curve anche la funzione seconda derivata dall'ordinata comune sarà eguale, è impossibile che una terza curva condotta pel punto comune passi tra le due prime, a meno che ancora in questa la funzione prima e seconda derivata dall'ordinata comune non sia la medesima; e così in seguito.

Nell'Analisi degl'infinitamente piccoli questi diversi contatti si riguardano come coincidenze di due o più punti delle curve che si toccano, ma questa idea non è esatta. Poichè le due curve propriamente non coincidono che in quel solo punto, nel quale le coordinate sono eguali, e l'eguaglianza delle funzioni prime, seconde, terze, ec. derivate dalla ordinata comune non rende le curve coincidenti in altri punti, ma le fa in modo avvicinare tra loro, che non può tra esse passare un'altra curva, nella quale la medesima eguaglianza di altrettante funzioni derivate non abbia luogo. Ma per distinguere tra loro queste diverse specie di contatti, chiameremo contatto del prim'ordine quello, nel quale ha luogo l'eguaglianza tra le sole funzioni prime derivate dall'ordinata comune alle due curve, contatto del second'ordine quello, in cui sono eguali le funzioni prime e seconde derivate dall'ordinata comune, ec.

28.

Siccome abbiamo già considerato il caso, in cui una delle linee è la linea retta, paragoniamo adesso una curva qualunque data col cerchio, che ha per equazione $(p-a)^2+(q-b)^2=c^2$, ove a e b sono le coordinate del centro, e c il raggio. Avremo $q=b+\sqrt{[c^2-(p-a)^2]}=f.p$, e perciò $f.x=b+\sqrt{[c^2-(x-a)^2]}$.

e $\frac{df}{dx}=-\frac{x-a}{\sqrt{[c^2-(x-a)^2]}}$. Facciamo $f.x=F.x=y$, e $\frac{df}{dx}=\frac{dF}{dx}=\frac{dy}{dx}$, cioè $y-b=\sqrt{[c^2-(x-a)^2]}$, $\frac{dy}{dx}\sqrt{[c^2-(x-a)^2]}=-x+a$, e la seconda di quest'equazioni ci darà $x-a=\frac{c\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}}$, la prima $y-b=-\frac{x-a}{\frac{dy}{dx}}=-\frac{c}{\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}}$, dalle quali si deduce

$$a=x-\frac{c\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}},\quad b=y+\frac{c}{\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}}.$$

Il circolo del raggio c, nel quale le coordinate a e b del centro hanno i valori precedenti, sarà tale, che tra esso e la curva non può passare un altro cerchio del medesimo raggio, e situato diversamente. Poichè dato un altro circolo, nel quale le coordinate del centro siano e ed f, in modo che sia $s=f+\sqrt{[c^2-(r-e)^2]}=\phi.r$, acciò questo possa passare tra la curva ed il primo cerchio, dovrà essere $\phi.x=y$, e $\frac{d\phi}{dx}=\frac{dy}{dx}$. Ora quest'equazioni nascono dall'equazioni $f.x=y$, e $\frac{df}{dx}=\frac{dy}{dx}$, purchè vi si cangi a in e, e b in f: dunque avremo da esse per e ed f i medesimi valori di a e b, e perciò il secondo circolo coinciderà col primo. Pertanto, secondo la definizione delle tangenti, il cerchio del raggio c, il di cui centro è determinato dai valori trovati di a e b, sarà tangente alla curva proposta nel punto corrispondente alle coordinate x ed y.

Siccome c può esser qualunque, vi saranno infiniti cerchi di diverso raggio, che sono tangenti al medesimo punto della curva, e la relazione tra le coordinate a e b del centro ed il raggio c si dedurrà dall'equazioni precedenti, che ci danno i valori di a e b qualunque sia c. Se da quest'equazioni elimineremo c,

otterremo l'equazione $b\frac{dy}{dx}=y\frac{dy}{dx}+x-a$, la quale sussiste, qualunque sia il valore di c, e determina la linea retta, sulla quale sono situati i centri di tutti i cerchi, i quali sono tangenti alla curva nel medesimo punto. Questa retta adunque dovrà esser normale alla curva; ed infatti si vede che la di lei equazione combina con quella, che sopra (22) abbiamo assegnata alla normale.

29.

Tra tutti questi circoli, che hanno con la curva proposta un contatto del prim'ordine, se ne può trovare uno, il quale abbia con la medesima un contatto del second'ordine, se si determinerà c in modo, che abbia luogo l'equazione $\frac{d^2f}{dx^2}=\frac{d^2y}{dx^2}$. Ora essendo $\frac{d^2f}{dx^2}=-\frac{c^2}{[c^2-(x-a)^2]^{\frac{3}{2}}}$, avremo

$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{c^2}{[c^2-(x-a)^2]^{\frac{3}{2}}}$; ma abbiamo trovato

$\sqrt{[c^2-(x-a)^2]}=-\frac{x-a}{\frac{dy}{dx}}=-\frac{c}{\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}}$, dunque

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{c}$, e $c=\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$. Se sostituiamo questo valore di c in quelli di a e b otterremo

$a=x-\frac{\frac{dy}{dx}\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}{\frac{d^2y}{dx^2}}$, $b=y+\frac{1+\frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$.

Tra il circolo così determinato e la curva data non potrà cadere l'arco di qualunque altro circolo. Sia infatti $s=\phi.r=f+\sqrt{[g^2-(r-e)^2]}$ l'equazione del cerchio, che si suppo-

ne passare tra il primo e la curva, e dovrà perciò essere $y=\phi.x$, $\frac{dy}{dx}=\frac{d\phi}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2\phi}{dx^2}$. Quest'equazioni si cangiano in $y=f.x$, $\frac{dy}{dx}=\frac{df}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2f}{dx^2}$, se le quantità e, f, g si mutano respettivamente in a, b, c. Dunque le prime equazioni ci daranno per e, f, g quei medesimi valori, che le seconde ci hanno dati per a, b, c; ed il secondo cerchio, che si supponeva passasse tra il primo e la curva, coinciderà esattamente col primo. Questo circolo ha relativamente ai circoli la medesima proprietà, che ha la tangente rapporto alle linee rette, ed è quello che si chiama circolo *osculatore* o *di curvatura*, perchè serve a misurare la curvatura delle linee curve. Il raggio c di questo circolo si chiama raggio di curvatura; e le quantità a e b determinano la posizione del centro del circolo osculatore, e sono le coordinate della curva, nella quale cadono i centri dei circoli osculatori di ciascun punto della curva data.

30.

Questa teoria dei contatti si può presentare in un modo più generale, e che somministra un calcolo più comodo. Siano x ed y le coordinate di una curva proposta, p e q quelle di un'altra curva, che si vuol paragonare con la prima, e sia l'equazione della seconda curva $F.(p, q, a, b, c\ldots)=0$, ove a, b, c, ec. sono quantità costanti. Se le costanti sono due sole a e b, e le determiniamo per mezzo dell'equazioni $F.(x, y, a, b)=0$, $\frac{dF(x,y,a,b)}{dx}=0$, la curva dell'equazione $F.(p, q, a, b)=0$ sarà tangente della proposta; poichè, quando $p=x$, sarà in vigore della prima equazione $q=y$, ed in vigore della seconda $\frac{dq}{dp}=\frac{dy}{dx}$.

Se le costanti sono trè, e le determiniamo coll'equazioni $F.(x, y, a, b, c)=0$, $\frac{dF.(x,y,a,b,c)}{dx}=0$, $\frac{d^2F.(x,y,a,b,c)}{dx^2}=0$, la curva dell'equazione $F.(p, q, a, b, c)=0$ avrà con la proposta un contatto del second'ordine, poichè in grazia delle tre precedenti equazioni, quando $p=x$, è $q=y$, $\frac{dq}{dp}=\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2q}{dp^2}=\frac{d^2y}{dx^2}$. E così in seguito per i contatti degli ordini superiori.

L'equazione la più generale della linea retta essendo $q-ap-b=0$, la quale non contiene che due costanti, la linea retta non può avere con una curva che un contatto del prim'ordine, per ottenere il quale si dovranno determinare a e b dall'equazioni $y-ax-b=0$, $\frac{dy}{dx}-a=0$, e si troverà $a=\frac{dy}{dx}$, $b=y-x\frac{dy}{dx}$, come sopra (21).

Il cerchio, di cui l'equazione più generale è $(p-a)^2+(q-b)^2-c^2=0$, non è suscettibile che di un contatto del second'ordine. Per determinare le costanti a, b e c ponghiamo x ed y in luogo di p e q, e prendendo due volte l'equazione derivata avremo $(x-a)^2+(y-b)^2-c^2=0$, $x-a+(y-b)\frac{dy}{dx}=0$, $1+(y-b)\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy^2}{dx^2}=0$, dalle quali equazioni ricaveremo subito

$$y-b=-\frac{1+\frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}},\quad x-a=\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}},\text{ e }c=\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

i quali valori combinano con quelli ottenuti precedentemente (29).

La curva della equazione $q=a+bp+cp^2+ep^3$ può avere a motivo delle quattro costanti un contatto del terz'ordine, e perchè lo abbia convien determinare queste costanti per mezzo dell'equazioni $y=a+bx+cx^2+ex^3$, $\frac{dy}{dx}=b+2cx+3ex^2$, $\frac{d^2y}{dx^2}=2c+6ex$, $\frac{d^3y}{dx^3}=6e$; le quali ci danno $e=\frac{1}{6}\frac{d^3y}{dx^3}$, $c=\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{x}{2}\frac{d^3y}{dx^3}$, $b=\frac{dy}{dx}-x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{x^2}{2}\frac{d^3y}{dx^3}$, $a=y-x\frac{dy}{dx}+\frac{x^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{x^3}{6}\frac{d^3y}{dx^3}$. Sostituiti questi valori l'equazione proposta diventa

$$q=y+(p-x)\frac{dy}{dx}+\frac{(p-x)^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{(p-x)^3}{2\cdot 3}\frac{d^3y}{dx^3}.$$

31.

Nel Calcolo Differenziale si riguarda l'*asintoto* come la

tangente della curva in un punto situato ad infinita distanza; ma questa nozione non è giusta, perchè l'asintoto và sempre più accostandosi alla curva senza mai raggiungerla. Vediamo adunque come possiamo formarci una idea più adequata degli asintoti tanto rettilinei che curvilinei. Sia $y=F.x$ l'equazione di una curva, e ponendovi $\frac{1}{i}$ in luogo di x svolgiamo il valore di $F.\frac{1}{i}$ in una serie ascendente della forma $Ai^{\alpha}+Bi^{\alpha+\beta}+Ci^{\alpha+\beta+\gamma}+$ec. Se data l'equazione di un'altra curva $y=f.x$ svolgiamo similmente $f.\frac{1}{i}$ in una serie ascendente, di cui alcuni dei primi termini siano identici con quelli dello sviluppo di $F.\frac{1}{i}$, dimostreremo col ragionamento più volte usato, che si potrà prendere i così piccola, che un'altra curva dell'equazione $y=\phi.x$, nella quale $\phi.\frac{1}{i}$ sviluppata per le potenze ascendenti di i non abbia un egual numero di primi termini identici con quelli di $F.\frac{1}{i}$, non potrà passare tra le prime due curve nei punti che corrispondono all'ascissa $x=\frac{1}{i}$, e a tutte le altre ascisse più grandi: poichè se un valore di i soddisfà alla condizione richiesta, vi soddisfaranno egualmente i valori di i più piccoli di quello. Da ciò si deduce che la curva della equazione $y=Ax^{-\alpha}$ andrà tanto più accostandosi alla curva proposta, quanto più grande sarà l'ascissa, e che vi sarà un'ascissa tale, passata la quale niun'altra curva, in cui la y sviluppata per le potenze discendenti di x non abbia per primo termine $Ax^{-\alpha}$, potrà cadere tra le due prime. Similmente la curva della equazione $y=Ax^{-\alpha}+Bx^{-\alpha-\beta}$, allorchè l'ascissa x è molto grande, si accosterà alla proposta più che la curva dell'equazione $y=Ax^{-\alpha}$, ed insieme più di qualunque altra curva, nella quale lo sviluppo di y non abbia i due primi termini $Ax^{-\alpha}+Bx^{-\alpha-\beta}$. E così in seguito.

Queste curve, che si accostano alla proposta più di qualunque altra curva, la quale non abbia le medesime condizioni, si chiamano *asintote* della proposta. E se i primi due termini dello sviluppo di $F.\frac{1}{i}$ saranno $A\frac{1}{i}+B$, la retta della equazione $y=Ax+B$ sarà l'asintoto rettilineo della curva data, e quando l'ascissa divien molto grande si avvicinerà alla curva più di qualunque altra retta. Dalla nozione, che abbiamo data degli asintoti si ricava subito il metodo, che deve tenersi per ritrovarli, il quale consiste nello svolgere la y in una serie discendente secondo le potenze di x. Data tra x ed y l'equazione $1+xy^2-y^3=0$ abbiamo trovato (18), che la y svolta in una serie discendente aveva la forma

$$y=x+\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^4}+\frac{7}{x^5}-\text{ec.}$$

Dunque la curva di quella equazione ha un asintoto rettilineo espresso dalla equazione $y=x$, la quale rappresenta una retta condotta per l'origine delle ascisse e formante un angolo semiretto coll'asse delle ascisse. Ma se vorremo una linea curva, che più di questa retta si accosti alla proposta, prenderemo la curva della equazione $y=x+\frac{1}{x^2}$, o quella della equazione

$y=x+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^5}$, ec.

Mediante i principj esposti in questo articolo acquistiamo una idea del modo di trovare gli asintoti delle curve più chiara di quella, che ci somministra il Cap. X. della Seconda Parte. Anzi conviene correggere l'articolo 91. in quella parte, ove si determinano i coefficienti β, γ, ec. dei termini $\frac{\beta}{x}$, $\frac{\gamma}{x^2}$, ec., perchè il metodo quivi esposto per questa ricerca è difettoso, e conviene usare quello del num. 18. di questo Opuscolo, o, ciò che è lo stesso, regolarsi in un modo analogo a quello praticato nel num. 92. del medesimo Capitolo. Così pure deve correggersi l'esempio posto in fine dello stesso Capitolo, ed in luogo della equazione $y+x=\frac{1}{2}-\frac{3}{8x^3}$ si troverà $y+x=\frac{1}{2}+\frac{1}{8x}$, e per conseguenza i due rami Bb, $B'b'$ saranno relativamente all'asintoto rettilineo LL' in parte opposta a quella, in cui sono descritti nella figura.

32.

Passiamo a cercare la quadratura delle curve. Sia data (Fig. 5) la curva CM riferita alle coordinate $AP=x$, e $PM=y$; se prendiamo $PQ=i$, sarà l'ordinata $QN=y+i\frac{dy}{dx}+\frac{i^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2}+$ec. L'area $BCMP$, che incomincia ad una ascissa data AB, sarà una funzione di x, che chiameremo u, e ponendovi $x+i$ in luogo di x sarà l'area $BCNQ=u+i\frac{du}{dx}+\frac{i^2}{2}\frac{d^2u}{dx^2}+$ec., e l'area $PMNQ=i\frac{du}{dx}+\frac{i^2}{2}\frac{d^2u}{dx^2}+$ec. Prendiamo i così piccola, che tra i punti P e Q non cada alcun massimo o minimo dell'ordinata; in tal caso l'ordinata PM andrà continuamente crescendo o continuamente diminuendo per tutto lo spazio P dell'asse. Posto ciò è facile il vedere, che l'area $PMNQ$ sarà sempre maggiore di uno e minore dell'altro dei due rettangoli, che hanno PQ per base, e PM, QN per altezze, i quali sono iy, ed $iy+i^2\frac{dy}{dx}+\frac{i^3}{2}\frac{d^2y}{dx^2}+$ec. Dovrà dunque la quantità $i\frac{du}{dx}+\frac{i^2}{2}\frac{d^2u}{dx^2}+$ec. esser compresa tra i limiti iy, ed $iy+i^2\frac{dy}{dx}+\frac{i^3}{2}\frac{d^2y}{dx^2}+$ec. Ma essendo il medesimo il primo termine di questi limiti, col discorso più volte usato vedremo, che la quantità $i\frac{du}{dx}+\frac{i^2}{2}\frac{d^2u}{dx^2}+$ec. non può esser compresa tra loro, se il primo termine $i\frac{du}{dx}$ non è eguale al primo termine dei limiti. Sarà dunque $\frac{du}{dx}=y$, cioè sarà la funzione prima derivata dall'area eguale all'ordinata, e quindi l'area eguale alla funzione primitiva dell'ordinata.

33.

Se due linee curve o composte di rette hanno le loro concavità voltate verso la medesima parte e gli stessi termini, quella è la più lunga che racchiude l'altra. Di questo principio ammesso da tutti i Geometri antichi e moderni ci serviremo per la ricerca della rettificazione delle curve. L'arco adunque MN

(Fig.5) della curva concavo in tutti i suoi punti dalla medesima parte sarà maggiore della corda MN, e minore della somma delle due tangenti MO, ON condotte ai punti M ed N della curva, le quali s'incontrano nel punto O. Ponghiamo, come sopra, i così piccola, che per tutto l'intervallo PQ l'ordinata vada continuamente o crescendo o decrescendo, nè vi sia alcun flesso contrario. Ciò posto, se si prolungano le tangenti MO, NO finchè incontrino in S ed R le ordinate QN e PM, e si conducono MV ed NT parallele a PQ, è facile il vedere che una delle tangenti NR cade tra la perpendicolare NT e la corda MN, e perciò è minore di questa corda, l'altra MS si allontana dalla perpendicolare MV più della corda MN, e perciò è maggiore di essa. Inoltre nel triangolo SON simile al triangolo MOR il lato OS opposto all'angolo ONS è maggiore del lato ON opposto all'angolo minore S, e perciò la tangente MS è maggiore della somma delle rette MO ed ON. Potremo facilmente assicurarci, che lo stesso sempre accade, qualunque sia la figura, e ne concluderemo che l'arco MN della curva cade tra le due tangenti MS, NR, cioè è maggiore di una e minore dell'altra.

Se chiamiamo s l'arco CM, sarà l'arco $CN = s + i\frac{ds}{dx} + \frac{i^2}{2}\frac{d^2s}{dx^2} + \text{ec.}$, e l'arco $MN = i\frac{ds}{dx} + \frac{i^2}{2}\frac{d^2s}{dx^2} + \text{ec.}$ La tangente MS è $= \sqrt{(\overline{MV}^2 + \overline{VS}^2)} = i\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} = i\phi.x$, se ponghiamo $\phi.x = \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$, e la tangente $NR = i\phi.(x+i) = i\phi.x + i^2\frac{d\phi}{dx} + \text{ec.}$ Dunque avendo i due limiti il medesimo primo termine $i\phi.x$, dovrà a questo essere eguale anche il primo termine della quantità $i\frac{ds}{dx} + \frac{i^2}{2}\frac{d^2s}{dx^2} + \text{ec.}$ contenuta tra questi limiti, e perciò $\frac{ds}{dx} = \phi.x = \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$, cioè sarà l'arco s eguale alla funzione primitiva della funzione $\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$.

34.

Nei problemi relativi alla quadratura ed alla rettificazione delle curve, come in molti altri, si rende necessaria la cognizione del calcolo inverso, con cui data una funzione o equazione derivata si possa giungere a quella funzione o equazione primitiva, dalla quale la proposta funzione o eqnazione può esser derivata. Noi per uniformarci alla maniera di scrivere ricevuta indicheremo col segno $\int A dx$ la funzione primitiva di A, ove il segno dx significa che A è funzione di x, o sia che la derivazione è stata fatta relativamente alla variabile x. Così le due equazioni $\frac{dy}{dx}=A$, ed $y=\int A dx$ significano la medesima cosa, ed indicano che la funzione A è la funzione derivata da y, o y la funzione primitiva di A. Ma quì convien fare una osservazione importante; siccome la funzione derivata da una quantità costante è zero, nel prender una funzione primitiva converrà aggiungervi una costante indeterminata, la quale o è sparita o può essere sparita nel prendere la funzione derivata; giacchè è la stessa la funzione derivata da y, e quella derivata da y accresciuta di una costante. Se a questa costante si darà un valore determinato, si otterrà una particolare funzione primitiva, ma se si lascia indeterminata, si avranno tutte le funzioni primitive, dalle quali la funzione proposta può esser derivata.

35.

Questo calcolo, con cui dalle funzioni derivate si ritorna alle primitive, dipende dalle medesime regole prese inversamente, ma come succede in tutti i metodi inversi quelle regole non vi si applicano con la stessa facilità. Se ci contentassimo di esprimere la funzione primitiva per mezzo di una serie, potremmo ottenerla sempre e con molta facilità. Infatti essendo data la funzione prima derivata da y avremo il valore di $\frac{dy}{dx}$, e da questa otterremo i valori delle altre funzioni $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, ec. Siano Y, Y', Y'', ec. ciò che respettivamente diventano le quantità y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ec., quando vi si pone $x=0$, e si avrà (17)

$$y=Y+xY'+\frac{x^2}{2}Y''+\frac{x^3}{2.3}Y'''+\text{ec.}$$

ove Y sarà una costante arbitraria. Quì però si suppone, che niuna delle funzioni $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ec. diventi infinita quando $x=0$; altrimenti bisognerebbe ricorrere al metodo esposto al num. 18. La medesima serie ci darà il valore di y, quando sarà data tra x ed y una equazione derivata del prim'ordine. Ma se avessimo tra x ed y una equazione derivata del second'ordine, potremmo da questa dedurre il valore di $\frac{d^2y}{dx^2}$ e delle funzioni derivate seguenti per y e $\frac{dy}{dx}$, ma non conosceremmo il valore di quest'ultime, e perciò nè pure Y ed Y'. Onde il valore di y ci verrà dato anche in questo caso dalla serie precedente, ma essa conterrà due costanti arbitrarie Y ed Y'. Si potrà un simile discorso applicare all'equazioni derivate degli ordini superiori, e si vedrà che il valore di y contiene tante costanti indeterminate, quanto è l'ordine della equazione derivata. Ma per ciò, che riguarda il numero delle costanti, le quali devono completare l'equazioni primitive ci rimettiamo a quanto ne abbiamo detto nel *Calcolo Integrale*, ove questa materia è bastantemente discussa e schiarita.

36.

Ma il problema, in cui si cercano le funzioni primitive sotto una forma finita, non può risolversi che relativamente ad alcune particolari specie di funzioni, ed il metodo per risolverlo convien dedurlo dal confronto delle funzioni primitive date con le loro derivate. Così essendo nx^{n-1} la funzione derivata da x^n, viceversa $\frac{x^n}{n}$ sarà la funzione primitiva di x^{n-1}, ed $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ la funzione primitiva di x^n. Noi non ci tratterremo in questa materia, perchè le regole, che potremmo dare, sono quelle medesime, le quali abbiamo esposte nel *Calcolo Integrale*. Infatti quantunque nel *Calcolo Differenziale* abbiamo data una origine ed un significato diverso al segno $\frac{dy}{dx}$, il valore però della fun-

zione rappresentata da questo segno si trova quivi con le medesime regole, che abbiamo insegnate di sopra. Onde viceversa le regole saranno le stesse, allorchè dal valor dato di $\frac{dy}{dx}$ si vuol passare alla funzione y, dalla quale questo valore è stato dedotto.

37.

Quantunque in generale data una funzione derivata non se ne sappia trovare la funzione primitiva, si possono però assegnare i limiti, tra i quali essa è compresa. Incominciamo dall'osservare che, se una funzione primitiva $F.z$ è tale, che la funzione $\frac{dF.z}{dz}$ derivata da lei si mantenga sempre positiva per tutti i valori di z compresi tra a e b, ove $b>a$, la differenza dei valori di $F.z$ corrispondenti a questi limiti a e b, cioè $F.b-F.a$ sarà una quantità positiva. Per dimostrar ciò denotiamo per più semplicità le funzioni prima, seconda, terza, ec. derivate da $F.z$ con i segni $F'.z$, $F''.z$, $F'''.z$, ec. ed avremo

$$F.(z+i)-F.z=iF'.z+\frac{i^2}{2}F''.z+\frac{i^3}{2.3}F'''.z+\text{ec.}$$

E siccome possiamo prendere i così piccola, che nel secondo membro della precedente equazione il primo termine $iF'.z$ superi la somma di tutti i seguenti, se $F'.z$ è positiva, potremo rendere i positiva e così piccola, che la quantità $F.(z+i)-F.z$ sia positiva. Ora se dividiamo la differenza tra a e b in porzioni come si voglia piccole, ciascuna delle quali sia $=i$, poichè la funzione $F'.z$ è positiva da $z=a$ fino a $z=b$, ponendo successivamente a, $a+i$, $a+2i$, ... $b-i$, b in luogo di z, tutte le funzioni $F'.a$, $F'.(a+i)$, $F'.(a+2i)$, ... $F'.(b-i)$, $F'.b$ sono positive. Dunque potrà sempre prendersi i così piccola, che tutte le quantità $F.(a+i)-F.a$, $F.(a+2i)-F.(a+i)$, $F.(a+3i)-F.(a+2i)$, ... $F.(b-i)-F.(b-2i)$, $F.b-F.(b-i)$ siano positive: e quindi la loro somma, cioè $F.b-F.a$ sarà una quantità positiva.

Ciò premesso sia K il più grande, ed L il più piccolo dei valori, che riceve la funzione derivata $f'z$ per tutti valori di z compresi tra le quantità a e b, ove dei valori negativi si riguardino come più grandi quelli, che prescindendo dal segno sareb-

bero minori; e le quantità $K-f'.z$, $f'.z-L$ saranno positive da $z=a$ fino a $z=b$. Facciamo $F'.z=K-f'.z$, e prendendo le funzioni primitive avremo, a motivo di K costante, $F.z=Kz-f.z$; e siccome $F'.z$ è sempre positiva da $z=a$ fino a $z=b$, sarà $F.b-F.a>0$, e sostituiti i valori $Kb-f.b-Ka+f.a>0$, e quindi $f.b<f.a+K(b-a)$.

Nella medesima guisa ponendo $F'.z=f'.z-L$ avremo $F.z=f.z-Lz$, e siccome anche in questo caso $F.b-F.a>0$, otterremo $f.b-Lb-f.a+La>0$, e perciò $f.b>f.a+L(b-a)$. Se adunque la funzione primitiva $f.z$ sarà così determinata, che sia dato il di lei valore quando $z=a$, avremo i limiti tra i quali è contenuta $f.z$ per un altro valore qualunque b di z. Convien però riflettere, che questa teoria essendo appoggiata allo sviluppo della funzione $F.(z+i)$ è soggetta a quell'eccezioni, che soffre questo sviluppo; onde cessa di aver luogo quando tra i limiti a e b alcuna delle funzioni derivate $f'.z$, $f''.z$, ec. diventa infinita.

38.

Se la funzione $f'.z$ avrà la forma z^nZ, ove Z è una funzione data di z, e se le quantità a e b saranno positive, i limiti della funzione primitiva $f.z$ si potranno esprimere sotto un'altra forma. Sia M il più grande ed N il più piccolo dei valori, che riceve la funzione Z da $z=a$ fino a $z=b$; saranno tra questi limiti positive le quantità $M-Z$, e $Z-N$, e così pure, a motivo di a e b positive, lo saranno le quantità $z^n(M-Z)$, e $z^n(Z-N)$. Ciò posto considerando la prima di queste quantità, e facendola $=F'.z$, avremo $F.b-F.a>0$: ma l'equazione

$F'.z=z^n(M-Z)$ ci dà $F.z=\frac{Mz^{n+1}}{n+1}-f.z$, perchè M è costante, e $z^nZ=f'.z$; dunque avremo

$$\frac{Mb^{n+1}}{n+1}-f.b-\frac{Ma^{n+1}}{n+1}+f.a>0,$$

onde si deduce

$$f.b<f.a+M\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}.$$

Usando un simile ragionamento sulla quantità $z^n(Z-N)$ ne ricaveremo

$$f.b > f.a + N\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}.$$

39.

Per mostrare l'applicazioni di questi principj ad un oggetto importante, ce ne prevarremo per valutare l'errore che si commette, allorchè nella serie (a)

$$F.(x+i) = F.x + iF'.x + \frac{i^2}{2}F''.x + \frac{i^3}{2.3}F'''.x + \text{ec.} \quad (a)$$

si prendono alcuni dei primi termini trascurati tutti i seguenti. Consideriamo lo sviluppo di $F.(x+i+z)$ secondo le potenze di z

$$F.(x+i+z) = F.(x+i) + zF'.(x+i) + \frac{z^2}{2}F''.(x+i) + \text{ec.},$$

e ponendovi $i-z$ in luogo di i avremo

$$F.(x+i) = F.(x+i-z) + zF'.(x+i-z) + \frac{z^2}{2}F''.(x+i-z) + \text{ec.} \quad (b)$$

e questa serie (b) si cangerà nella serie (a), se vi faremo $z=i$. Siano adesso $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, $P^{(3)}$, ec. gli errori che si commettono, allorchè nella serie (b) si prende il solo primo termine $F.(x+i-z)$, o i soli due primi termini $F.(x+i-z)+zF'.(x+i-z)$, o i primi tre termini $F.(x+i-z)+zF'.(x+i-z)+\frac{z^2}{2}F''.(x+i-z)$, ec.; è chiaro che $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, $P^{(3)}$, ec. saranno tali funzioni di z, che diventeranno nulle quando $z=0$, e se vi porremo $z=i$, si cangeranno negli errori corrispondenti per la serie (a).

Avremo dunque in primo luogo per determinar $P^{(1)}$ l'equazione

$$F.(x+i) = F.(x+i-z) + P^{(1)},$$

e siccome questa sussiste qualunque sia z, sussisterà ancora tra le funzioni derivate prese relativamente a z. Quindi osservando che, posto $x+i-z=p$, è $\frac{dF.(x+i-z)}{dz} = F'.p\frac{dp}{dz} = -F'.p = -F'.(x+i-z)$, otterremo

$$o = -F.(x+i-z) + \frac{dP^{(1)}}{dz},$$

cioè $\frac{dP^{(1)}}{dz} = F.(x+i-z)$, e $P^{(1)} = \int dz F.(x+i-z)$, la qual funzione primitiva deve prendersi relativamente a z considerando x ed i come costanti, ed in modo determinarsene la costante arbitraria, che la funzione svanisca quando $z=o$.

In secondo luogo sarà

$$F.(x+i) = F(x+i-z) + zF.(x+i-z) + P^{(2)},$$

e prese le funzioni derivate per rapporto a z

$$o = -F.(x+i-z) + F.(x+i-z) - zF'.(x+i-z) + \frac{dP^{(2)}}{dz};$$

onde si deduce $\frac{dP^{(2)}}{dz} = zF'.(x+i-z)$, e $P^{(2)} = \int z dz F'.(x+i-z)$.

Così pure se faremo

$$F.(x+i) = F.(x+i-z) + zF.(x+i-z) + \frac{z^2}{2}F'.(x+i-z) + P^{(3)},$$

e prenderemo le funzioni derivate relativamente a z, troveremo

$$o = -F.(x+i-z) - zF'.(x+i-z) - \frac{z^2}{2}F''.(x+i-z) + \frac{dP^{(3)}}{dz},$$
$$+F.(x+i-z) + zF'.(x+i-z)$$

cioè $\frac{dP^{(3)}}{dz} = \frac{z^2}{2}F''.(x+i-z)$, e $P^{(3)} = \frac{1}{2}\int z^2 dz F''.(x+i-z)$.

Onde in generale apparisce che, chiamando $P^{(n+1)}$ l'errore che si commette, allorchè per esprimere il valore di $F.(x+i)$ si prendono gli $n+1$ primi termini della serie $F.(x+i-z) + zF.(x+i-z) +$ ec. trascurati gli altri, avremo $\frac{dP^{(n+1)}}{dz} = \frac{z^n}{2.3...n}F^{(n+1)}.(x+i-z)$, cioè $P^{(n+1)} = \frac{1}{2.3...n}\int z^n dz F^{(n+1)}.(x+i-z)$. Presa questa funzione primitiva in modo, che svanisca quando $z=o$, se vi faremo poi $z=i$, e dopo questa sostituzione la funzione $P^{(n+1)}$ diventi $Q^{(n+1)}$, sarà

$$F.(x+i)=F.x+iF'.x+\frac{i^2}{2}F''.x\ldots+\frac{i^n}{2.3\ldots n}F^{(n)}.x+Q^{(n+1)}.$$

40.

Siccome il valore di $Q^{(n+1)}$ è espresso per la funzione primitiva di una data funzione derivata, potremo trovare i limiti, tra i quali è compresa $Q^{(n+1)}$, mediante il metodo esposto (38). Facciamo $f.z=\int z^n dz F^{(n+1)}.(x+i-z)$, e sarà $f'.z=z^n F^{(n+1)}.(x+i-z)$, e quindi $Z=F^{(n+1)}.(x+i-z)$. Ponghiamo $a=0$, $b=i$, e chiamando M il più grande ed N il più piccolo valore, che riceve la funzione $F^{(n+1)}.(x+i-z)$ da $z=0$ fino a $z=i$, avremo

$$f.i<f.0+M\frac{i^{n+1}}{n+1}$$

$$f.i>f.0+N\frac{i^{n+1}}{n+1}.$$

Ma siccome si deve prendere la funzione $f.z$ in modo, che svanisca quando $z=0$, sarà $f.0=0$, ed $\frac{Mi^{n+1}}{n+1}$, $\frac{Ni^{n+1}}{n+1}$ saranno i limiti di $f.i$, e qnindi $\frac{Mi^{n+1}}{2.3\ldots(n+1)}$, $\frac{Ni^{n+1}}{2.3\ldots(n+1)}$ i limiti di $Q^{(n+1)}$.

Adesso potremo determinare quel valore di i, che rende un termine qualunque $\frac{i^n}{2.3\ldots n}F^{(n)}.x$ dello sviluppo di $F.(x+i)$ più grande della somma di tutti i termini seguenti. Poichè essendo questa somma $=Q^{(n+1)}$, e $Q^{(n+1)}<\frac{Mi^{n+1}}{2.3\ldots(n+1)}$, basterà porre

$\frac{i^n}{2.3...n}F^{(n)}.x > \frac{Mi^{n+1}}{2.3...(n+1)}$, cioè $i < \frac{(n+1)F^{(n)}.x}{M}$.

41.

Il resultato ottenuto nel num. precedente si potrà presentare con maggior brevità di discorso, se si riflette che, essendo M ed N il più grande ed il più piccolo dei valori di $F^{(n+1)}.(x+i-z)$ da $z=0$ a $z=i$, qualunque valore intermedio tra M ed N potrà esprimersi dalla medesima funzione $F^{(n+1)}.(x+i-z)$, se si darà a z un valore intermedio tra o ed i, o sia dalla funzione $F^{n+1}.(x+i-\mu i)$, ove μ è un numero compreso tra o ed 1, o più semplicemente, posto $1-\mu=\lambda$, dalla funzione $F^{(n+1)}.(x+\lambda i)$, ove anche λ è contenuto tra o ed 1. Sarà pertanto $Q^{(n+1)}=\frac{i^{n+1}}{2.3...(n+1)}F^{(n+1)}.(x+\lambda i)$, e

$$F.(x+i)=F.x+iF'.x+\frac{i^2}{2}F''.x...+\frac{i^n}{2.3...n}F^{(n)}.x+\frac{i^{n+1}}{2.3...(n+1)}F^{(n+1)}.(x+\lambda i),$$

ove λ è un numero incognito, ma compreso tra zero e l'unità.

Sia per esempio $F.x=\log.x$, ed avremo

$$\log.(x+i)=\log.x+i\frac{1}{x}-\frac{i^2}{2}.\frac{1}{x^2}...\pm\frac{i^n}{n}.\frac{1}{x^n}\mp\frac{i^{n+1}}{n+1}.\frac{1}{(x+\lambda i)^{n+1}};$$

e siccome $\frac{1}{x^{n+1}}$ ed $\frac{1}{(x+i)^{n+1}}$ sono il più grande ed il più piccolo valore della funzione $\frac{1}{(x+\lambda i)^{n+1}}$, saranno

$\mp\frac{1}{n+1}\left(\frac{i}{x}\right)^{n+1}$ e $\mp\frac{1}{n+1}\left(\frac{i}{x+i}\right)^{n+1}$ i limiti dell'errore che si commette, allorchè si prendono i soli $n+1$ primi termini dello sviluppo di $\log.(x+i)$.

42.

Se facciamo $x=0$, e chiamiamo F, F', F'', ec. i valori di $F.x$, $F'.x$, $F''.x$, ec. nel caso di $x=0$, avremo

$$F.i=F+iF'+\frac{i^2}{2}F''\ldots+\frac{i^n}{2.3\ldots n}F^{(n)}+\frac{i^{n+1}}{2.3\ldots(n+1)}F^{(n+1)}.\lambda i,$$

e cangiando i in x

$$F.x=F+xF'+\frac{x^2}{2}F''\ldots+\frac{x^n}{2.3\ldots n}F^{(n)}+\frac{x^{n+1}}{2.3\ldots(n+1)}F^{(n+1)}.\lambda x.$$

Nei metodi di approssimazione, che dipendono dalle serie, potremo per mezzo del teorema precedente molte volte stimare l'errore, che risulta dai termini che si trascurano.

Se per esempio $F.x=\sqrt{(1+x)}$, sarà $F'.x=\frac{1}{2(1+x)^{\frac{1}{2}}}$,

$F''.x=-\frac{1}{2^2(1+x)^{\frac{3}{2}}}$, $F'''.x=\frac{1.3}{2^3(1+x)^{\frac{5}{2}}}$, e generalmente

$F^{(n)}.x=\pm\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2^n(1+x)^{\frac{2n-1}{2}}}$, ove il segno $+$ ha luogo quando n è dispari, ed il segno $-$ quando n è pari. Sostituendo questi valori nel teorema generale avremo

$$\sqrt{(1+x)}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2^2}.\frac{x^2}{2}+\frac{1.3}{2^3}.\frac{x^3}{2.3}-\frac{1.3.5}{2^4}.\frac{x^4}{2.3.4}\ldots\ldots$$

$$\pm\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2^n}.\frac{x^n}{2.3\ldots n}\mp\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^{n+1}(1+\lambda x)^{\frac{2n+1}{2}}}.\frac{x^{n+1}}{2.3\ldots(n+1)}.$$

Siccome il valore di $1+\lambda x$ cade tra 1 ed $1+x$, l'errore per eccesso o per difetto commesso nel trascurare tutti i termini posteriori all' $(n+1)$.^{esimo} sarà $<\frac{1.3.5\ldots(2n-1)x^{n+1}}{2.3\ldots(n+1)2^{n+1}}$, cioè minore del termine $(n+2)$.^{esimo} della serie.

43.

I metodi, con i quali dall'equazioni derivate si passa alle loro primitive, sono quei medesimi, che abbiamo esposti nel *Calcolo Integrale*, e perciò ci asterremo dal parlarne. Solo perchè questi metodi spesso introducono in luogo di x ed y altre variabili t ed u, delle quali le prime sono funzioni, conviene accennare il modo, che secondo gli esposti principj si deve tenere nell'eseguire queste sostituzioni. Essendo x ed y funzioni date di t ed u, e dopo la sostituzione u divenendo funzione di t, anche x ed y diventeranno funzioni di t. Ma, quando x è funzione di t, abbiamo (8) $\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$; dunque in luogo di $\frac{dy}{dx}$ convien porre $\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$, quando si vuol passare alla ipotesi, in cui x ed y sono funzioni di t. Data adunque l'equazione $\frac{dy}{dx}=F.(x,y)$, bisogna prima trasformarla nella seguente $\frac{dy}{dt}=\frac{dx}{dt}F.(x,y)$, e poi sostituire in luogo di $x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ i loro valori in t, u, e $\frac{du}{dt}$. Se si ponesse per esempio $x=t+u$, $y=t-u$, sarebbe $\frac{dx}{dt}=1+\frac{du}{dt}$, $\frac{dy}{dt}=1-\frac{du}{dt}$, e la proposta diventerebbe $1-\frac{du}{dt}=\left(1+\frac{du}{dt}\right)F.(t+u, t-u)$.

Per la medesima ragione in luogo di $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, ec. converrà porre respettivamente $\frac{d.\frac{dy}{dx}}{dt}:\frac{dx}{dt}$, $\frac{d.\frac{d^2y}{dx^2}}{dt}:\frac{dx}{dt}$, ec., le quali espressioni, sostituendovi gradatamente i valori di $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ec., e sviluppandole divengono $\frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}-\frac{\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}$,

$$\frac{\frac{d^3y}{dt^3}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3} - 3\,\frac{\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^4} - \frac{\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^3x}{dt^3}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^4} + 3\,\frac{\frac{dy}{dt}\cdot\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^5}, \text{ ec.}$$

44.

Se facciamo $t=y$ ed $u=x$, avremo $\frac{dy}{dt}=1$, e nella equazione data dovremo perciò sostituire $\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ in luogo di $\frac{dy}{dx}$, $-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}$ in luogo di $\frac{d^2y}{dx^2}$, $-\frac{\frac{d^3x}{dy^3}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^4} + 3\,\frac{\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5}$ in luogo di $\frac{d^3y}{dx^3}$, ec. In tal modo si otterrà una equazione equivalente alla proposta, ma nella nuova equazione, invece di riguardare y come funzione di x, viceversa si riguarderà x come funzione di y.

Quindi si deduce in primo luogo, che data l'equazione $\frac{dy}{dx}=A$, ove y si considera come funzione di x, si potranno invertere i termini della frazione $\frac{dy}{dx}$, purchè s' inverta ancora il termine A, e l'equazione $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{A}$, in cui x si considera come funzione di y, sussisterà egualmente. Sia per esempio $y=\text{sen.}x$, e $\frac{dy}{dx}=\cos.x$; avremo $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\cos.x}=\frac{1}{\sqrt{(1-\text{sen.}^2x)}}=\frac{1}{\sqrt{(1-y^2)}}$, cioè $\frac{1}{\sqrt{(1-y^2)}}$ sarà la funzione derivata da x o sia dall'arco del seno y.

In secondo luogo apparisce che, o si consideri y come funzione di x, o x come funzione di y, non potranno aver luogo insieme i due segni d^2x e d^2y in una equazione derivata del second'ordine, ma uno solo di essi. Similmente non potranno insieme sussistere nè pure i due segni d^3x e d^3y in una equazio-

ne derivata del terz'ordine; e così in seguito. Che se i medesimi segni si trovassero insieme in una data equazione derivata, ciò indicherebbe, che nella proposta equazione ha luogo un'altra variabile t, di cui x ed y sono funzioni. Ma questo sembrando contrario a quello, che abbiamo veduto nel *Calcolo Differenziale*, fà d'uopo spiegare l'origine di una tale differenza.

45.

Dalla equazione $F.(x, y)$=cost: si deduce l'equazione derivata della forma $A\frac{dy}{dx}+B$=o. Questa medesima equazione l'abbiamo nel *Calcolo Differenziale* ricavata dalla teoria dei *limiti*: ove quantunque la funzione indicata dal segno $\frac{dy}{dx}$ avesse un'altra origine e significato, pure si deduceva dalla funzione y con le medesime regole, che abbiamo adesso usate pel calcolo delle funzioni derivate, e perciò il valore di $\frac{dy}{dx}$ è in un caso e nell'altro il medesimo. Ma poi scordandoci che $\frac{dy}{dx}$ era un segno abbiamo considerate dx e dy come se fossero quantità, e fatta la moltiplicazione per dx abbiamo posta l'equazione derivata sotto la forma $Ady+Bdx$=o, che è quella, alla quale si giunge col metodo inesatto degl'infinitamente piccoli, in cui dx e dy si riguardano come gli accrescimenti infinitesimi di x e di y, e nel prendere il valore di dy si trascurano le potenze superiori di dx. Questa forma è viziosa, in quanto ci presenta la falsa idea, che dx e dy siano quantità, e volendola ritenere per uniformarci all'uso ricevuto, dobbiamo mentalmente dividerla per dx, affine di distruggere l'inopportuna moltiplicazione, e pensare che il segno $\frac{dy}{dx}$ rappresenta una funzione formata con certe regole dalla funzione y.

Sia data adesso l'equazione derivata del prim'ordine

$$(1)\quad A\frac{dy}{dx}+B=\text{cost.}$$

ove A e B sono funzioni di x e di y, dalla quale si derivi l'equazione del second'ordine

$$(2)\quad A\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dA}{dy}\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dy}\right)\frac{dy}{dx}+\frac{dB}{dx}=0.$$

Nel Calcolo Differenziale, considerando sempre dx e dy come quantità, passiamo all'equazione differenziale del second'ordine o supponendo dx costante, o supponendola variabile. Nel primo caso abbiamo l'equazione

$$Ad^2y+\frac{dA}{dy}dy^2+\left(\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dy}\right)dxdy+\frac{dB}{dx}dx^2=0,$$

la quale essendo divisa per dx^2, affine di distruggere la viziosa moltiplicazione per dx^2, non differisce dalla equazione (2). Ma nel secondo caso si ottiene l'equazione

$$(3)\ Ad^2y-A\frac{dy}{dx}d^2x+\frac{dA}{dy}dy^2+\left(\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dy}\right)dxdy+\frac{dB}{dx}dx^2=0,$$

la quale contiene di più il termine $-A\frac{dy}{dx}d^2x$. Quantunque questa equazione sia dedotta con un metodo vizioso dalla equazione (1), potremo inversamente operando ritornare dalla equazione (3) alla equazione (1). Ma a questa medesima equazione (1) giungeremo ancora, se cancelleremo il termine soprabbondante $-A\frac{dy}{dx}d^2x$, e riducendo l'equazione (3) alla forma della equazione (2) cercheremo poi l'equazione primitiva di questa.

Qui però convien riflettere, che nel termine soprabbondante il coefficiente di d^2x non può esser qualunque, ma deve avere un certo rapporto con quello di d^2y: infatti se chiamiamo C questo coefficiente di d^2x, dovrà essere $C=-A\frac{dy}{dx}$; e questa condizione è necessaria, perchè l'equazione (3) sia dedotta dalla equazione (1). Quindi viceversa, se sarà data l'equazione

$$Ad^2y+Cd^2x+Ddy^2+Edxdy+Fdx^2=0,$$

essa potrà sussistere, se sarà $C=-A\frac{dy}{dx}$, ed in tal caso ci darà la medesima relazione tra x ed y, che ci dà essendo ridotta alla forma legittima

$$A\frac{d^2y}{dx^2}+D\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+E\frac{dy}{dx}+F=0.$$

Ma se non fosse $C=-A\frac{dy}{dx}$, quella equazione sarebbe formata a capriccio, non sarebbe dedotta da una equazione tra x

ed y, ed in conseguenza non potrebbe sussistere. Non ne segue però, che essa sia assurda in tutti i sensi, ma è tale soltanto, quando y è funzione di x, e cessa di esserlo, quando x ed y si riguardano come funzioni di un'altra variabile t. Infatti divisa per dt^2 prende la forma della equazione derivata

$$A\frac{d^2y}{dt^2}+C\frac{d^2x}{dt^2}+D\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+E\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dy}{dt}+F\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=0,$$

la quale può sussistere (44), quando x è funzione di t. Ma poichè l'equazione data nulla ci dice sulla forma di questa funzione di t, a cui x dev'essere eguale, essa rimarrà indeterminata, e potrà esser qualunque. Lo che combina con quello, che abbiamo detto nel Cap. IX. del *Calcolo Integrale*.

Le precedenti riflessioni potranno facilmente rendersi più generali, ed anche applicarsi all'equazioni degli ordini superiori. Da esse apparirà, che qualunque volta l'equazioni differenziali sono di aspetto diverse da quelle, che si deducono dal metodo delle funzioni derivate, ciò nasce sempre dall'errore medesimo che si commette nel riguardare i segni dx, dy, d^2x, d^2y, ec., come se fossero quantità. Conosciuta l'origine di questa differenza si potrà facilmente la forma illegittima ridurre a quella, che è coerente ai principj del calcolo rigoroso delle funzioni derivate.

46.

Avendo nel *Calcolo Integrale* diffusamente spiegata l'origine, e la maniera di ritrovare quelle soluzioni particolari, che soddisfanno all'equazioni derivate, quantunque non siano contenute nella loro equazione primitiva completa, ci asterremo dal parlarne di nuovo. Ma per compimento di questa dottrina faremo quì brevemente vedere, che cosa significano le soluzioni particolari, quando si riferiscono alla Geometria. Una equazione qualunque $F.(x, y, a)=0$ tra x ed y ed una costante arbitraria a, allorchè si danno a questa costante tutti i valori possibili, rappresenta una famiglia d'infinite curve, le quali variano di posizione e di grandezza relativamente alle variazioni di a. In ciascuna di queste curve il valore di a si mantiene costante, ma è diverso da una curva all'altra. Così l'equazione $x^2+y^2=a^2$ rappresenta la famiglia di tutti i circoli, che hanno il medesimo centro, e raggio diverso; l'equazione $(x-a)^2+y^2=1$ tutti i

circoli di raggio eguale, che hanno il centro situato in diversi punti dell'asse delle ascisse; e finalmente l'equazione $(x-a)^2+y^2=\overline{f.a}^2$ rappresenta tutti i cerchi, nei quali varia e la posizione del centro sull'asse delle ascisse, e la grandezza del raggio in un modo dipendente dalla composizione della funzione $f.a$ . .

Data la famiglia di curve espressa dalla equazione $F.(x, y, a)=0$, se si volesse una curva, che avesse un punto comune con ciascuna di quelle, questa nuova curva potrebbe rappresentarsi dalla medesima equazione $F.(x, y, a)=0$, purchè si riguardasse a come funzione di x. Infatti se b è un valore determinato della costante arbitraria a, la curva dell'equazione $F.(x, y, b)=0$ avrà un punto comune con la curva della equazione $F.(x, y, \phi.x)=0$, e questo punto corrisponderà a quell'ascissa x tale, che renda $\phi.x=b$; e lo stesso discorso si applica a ciascuna delle curve contenute nella medesima famiglia.

La funzione $\phi.x$ è indeterminata, e può esser qualunque; onde può in modo determinarsi, che la curva dell'equazione $F.(x, y, \phi.x)=0$ soddisfaccia a qualche nuova condizione. Ponghiamo che questa curva debba toccare ciascuna delle curve contenute nella medesima famiglia; dovrà in tal caso il valore di $\frac{dy}{dx}$ essere il medesimo tanto nella curva toccante che nelle curve toccate, lo che per le cose precedenti otterremo (30), se faremo in modo, che l'equazione derivata da $F.(x, y, a)=0$ sia la stessa quando a è costante, e quando è funzione di x. Ma quando a è variabile, questa equazione derivata contiene di più il termine $\frac{dF.(x, y, a)}{da} \cdot \frac{da}{dx}$; bisogna dunque che manchi questo termine, cioè che sia $\frac{dF.(x, y, a)}{da}=0$, la qual'equazione ci darà il valore di a, o sia determinerà la forma della funzione $\phi.x$, perchè la curva della equazione $F.(x, y, \phi.x)=0$ tocchi ciascuna delle curve rappresentate dall'equazione $F(x, y, a)=0$.

Se riguardiamo l'equazione $F.(x, y, a)=0$ come l'equazione primitiva completa di una equazione derivata del prim'ordine, l'equazione $F.(x, y, \phi.x)=0$, ove $\phi.x$ è determinata nel modo precedente, è ciò che si chiama una soluzione particolare

della proposta equazione derivata. Dunque la soluzione particolare di una equazione derivata del prim'ordine rappresenta una curva, la quale avvolge tutta la famiglia di curve espressa dalla equazione primitiva completa, ed ha con ciascuna di esse un contatto del prim'ordine.

Sia data adesso tra x, y, $\frac{dy}{dx}$, ed una costante indeterminata a l'equazione $F.(x, y, \frac{dy}{dx}, a)=0$; questa equazione rappresenta una intera famiglia di curve, le quali nascono quando si danno ad a tutti i valori possibili. E se in luogo di a vi poniamo $\phi.x$, l'equazione $F.(x, y, \frac{dy}{dx}, \phi.x)=0$, qualunque sia $\phi.x$, rappresenta una curva, che avvolge tutte quelle della famiglia precedente, ed ha con ciascuna di esse un contatto del prim'ordine. Se determineremo adesso $\phi.x$ in modo, che l'equazione derivata da $F.(x, y, \frac{dy}{dx}, a)=0$ sia la medesima quando a è costante, e quando è variabile, alla qual condizione soddisfaremo ponendo $\frac{dF.\left(x, y, \frac{dy}{dx}, a\right)}{da}=0$, la curva dell'equazione $F.\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \phi.x\right)=0$, avrà allora con le medesime curve un contatto del second'ordine. Trasportando queste considerazioni alle soluzioni particolari vedremo, che la soluzione particolare di una equazione derivata del second'ordine rappresenta una curva, la quale ha un contatto del second'ordine con ciascuna delle curve di quella famiglia, che è espressa dall'equazione derivata del prim'ordine, la quale è l'equazione primitiva completa della proposta. Simili riflessioni potranno applicarsi alle soluzioni particolari dell'equazioni derivate di un ordine più elevato.

47.

Fin quì abbiamo considerata una sola variabile y come funzione di x; diciamo adesso qualche cosa del caso, in cui due variabili y e z sono ambedue funzioni di una terza x. Siano M ed N funzioni date delle variabili x, y, z, e ponghiamo che

abbiano luogo insieme le due eqnazioni $M=a$, $N=b$, ove a e b sono quantità costanti; tanto y che z saranno funzioni di x. Quindi se prendiamo le funzioni derivate da M ed N considerando y e z come funzioni di x, sussisteranno insieme le due equazioni, che nascono dal porre eguali a zero queste funzioni derivate, cioè

$$\frac{dM}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}+\frac{dM}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{dM}{dx}=0$$
$$\frac{dN}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}+\frac{dN}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{dN}{dx}=0,$$

lo che può dimostrarsi con un discorso analogo a quello usato al num. 9.

Viceversa, se fosser date le due equazioni derivate

$$A\frac{dz}{dx}+B\frac{dy}{dx}+C=0$$
$$D\frac{dz}{dx}+E\frac{dy}{dx}+F=0,$$

ove i coefficienti A, B, C dipendessero in modo da una medesima funzione M, che fosse $A=\frac{dM}{dz}$, $B=\frac{dM}{dy}$, $C=\frac{dM}{dx}$, e così pure fosse $D=\frac{dN}{dz}$, $E=\frac{dN}{dy}$, $F=\frac{dN}{dx}$, sarebbero $M=a$ ed $N=b$ le loro equazioni primitive. Ma siccome date due equazioni si può dalla loro combinazione in infinite maniere dedurre altre due equazioni equivalenti alle prime, ma di coefficienti diversi, è molto raro il caso, che l'equazioni proposte abbiano tra i loro coefficienti quella relazione, che abbiamo ad essi assegnata; onde per lo più non sarà così facile la ricerca delle loro equazioni primitive. Qualunque però sia la forma di questi coefficienti, una tal ricerca potrà sempre ridursi a quella dell'equazione primitiva di una equazione derivata tra due sole variabili.

Incominciamo dal ridurre l'equazioni proposte ad una forma più semplice, eliminandone prima $\frac{dy}{dx}$ e poi $\frac{dz}{dx}$; e ponendo $AE-BD=G$, $CE-BF=H$, $AF-CD=I$, in luogo di esse consideriamo le seguenti

$$(1)\quad G\frac{dz}{dx}+H=0$$

$$(2)\quad G\frac{dy}{dx}+I=0\,,$$

che equivalgono alle prime, ma sono più semplici. Prendiamo le funzioni derivate da ciascun termine della equazione (1), ed avremo una nuova equazione tra $x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}$, la quale si ridurrà solamente tra $x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}$, se in luogo di $\frac{dy}{dx}$ vi porremo il suo valore $-\frac{I}{G}$. Ora mediante questa e l'equazione (1) eliminando y otterremo una equazione derivata del second'ordine tra x e z, e tutta la difficoltà dipenderà dalla ricerca della equazione primitiva di essa. Infatti trovata questa equazione primitiva, che chiameremo (3), la quale conterrà x, z e due costanti arbitrarie a, b, ne prenderemo l'equazione derivata, e ponendovi $-\frac{H}{G}$ in luogo di $\frac{dz}{dx}$ avremo una nuova equazione (4), che conterrà x, y, z, a, e b. Le due equazioni (3) e (4) soddisfaranno alle proposte equazioni derivate, e determineranno ciascuna delle due variabili y e z per x.

È facile adesso il dimostrare, che dalle proposte si può sempre dedurre altre due equazioni, ciascuna delle quali sia della forma

$$\frac{dM}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}+\frac{dM}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{dM}{dx}=0\,.$$

Dall'equazioni (3) e (4) ricaviamo il valore di a e di b per x, y, z, e sia $a=P$, $b=Q$; quest'equazioni $P=a$, $Q=b$ equivarranno all'equazioni (3) e (4), e ci presenteranno sotto un'altra forma l'equazioni primitive delle proposte. Consideriamo una di quest'equazioni $P=a$, e passando alle funzioni derivate avremo $\frac{dP}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}+\frac{dP}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{dP}{dx}=0$, e sostituendo in questa in luogo di $\frac{dz}{dx}$ e $\frac{dy}{dx}$ i loro valori ricavati dall'equazioni (1) e (2) otterremo una equazione identica. Poichè se non fosse tale, ci darebbe una relazione tra x, y, e z, la quale dovrebbe esser d'accordo con l'equazioni $P=a$, e $Q=b$, e ciò non può essere, per-

chè quella relazione non conterrebbe le costanti a e b. Se invece di sostituire nella equazione $\frac{dP}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{dP}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{dP}{dx} = 0$ ambedue i valori di $\frac{dz}{dx}$ e $\frac{dy}{dx}$, vi ponghiamo solamente quello di $\frac{dy}{dx}$, avremo $\frac{dP}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} - \frac{I}{G} \cdot \frac{dP}{dy} + \frac{dP}{dx} = 0$. E siccome questa equazione diventerebbe identica, se vi si sostituisse il valore di $\frac{dz}{dx}$, ne segue che il valore di $\frac{dz}{dx}$ ricavato da essa dev'essere identicamente eguale a quello che ci somministra l'equazione (1). Sarà dunque $\frac{\frac{I}{G} \cdot \frac{dP}{dy} - \frac{dP}{dx}}{\frac{dP}{dz}} = -\frac{H}{G}$, alla qual condizione soddisfaremo nel modo il più generale prendendo $\frac{dP}{dx} - \frac{I}{G} \cdot \frac{dP}{dy} = mH$, $\frac{dP}{dz} = mG$, ove m è funzione di x, y, z. Similmente se nella equazione medesima $\frac{dP}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{dP}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{dP}{dx} = 0$ sostituiamo il valore di $\frac{dz}{dx}$ ricavato dalla proposta (1), l'equazione $\frac{dP}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{H}{G} \cdot \frac{dP}{dz} + \frac{dP}{dx} = 0$, che ne risulta, dovrà esser d'accordo con l'equazione (2); onde nell'istessa maniera avremo $\frac{dP}{dx} - \frac{H}{G} \cdot \frac{dP}{dz} = nI$, $\frac{dP}{dy} = nG$, essendo n funzione di x, y, z. E quì si osservi che ambedue l'equazioni $\frac{dP}{dx} - \frac{I}{G} \cdot \frac{dP}{dy} = mH$, $\frac{dP}{dx} - \frac{H}{G} \cdot \frac{dP}{dz} = nI$ si uniscono a darci $\frac{dP}{dx} = mH + nI$.

Pertanto l'equazione $\frac{dP}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{dP}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{dP}{dx} = 0$ prenderà la forma

$$m\left(G\frac{dz}{dx} + H\right) + n\left(G\frac{dy}{dx} + I\right) = 0,$$

e sostituiti i valori di G, H, I diventerà

$$(Em-Dn)\left(A\frac{dz}{dx}+B\frac{dy}{dx}+C\right)+(An-Bm)\left(D\frac{dz}{dx}+E\frac{dy}{dx}+F\right)=0,$$

cioè nascerà dalla somma dell'equazioni proposte

$$A\frac{dz}{dx}+B\frac{dy}{dx}+C=0$$

$$D\frac{dz}{dx}+E\frac{dy}{dx}+F=0$$

moltiplicate respettivamente per le funzioni $Em-Dn$, $An-Bm$. Applicando il medesimo discorso all'altra equazione $Q=b$ giungeremo ad un simile resultato; onde viceversa si può concludere, che esistono tali funzioni, per le quali essendo moltiplicate l'equazioni proposte e poi sommate, si ottengono due equazioni della forma

$$\frac{dP}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}+\frac{dP}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{dP}{dx}=0$$

$$\frac{dQ}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}+\frac{dQ}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{dQ}{dx}=0,$$

le quali conducono immediatamente all'equazioni primitive $P=a$, e $Q=b$. I medesimi principj si possono applicare alla ricerca dell'equazioni primitive di tre equazioni derivate tra quattro variabili; e così in seguito.

48.

Due equazioni tra tre variabili x, y, z riferite alla Geometria rappresentano in generale una linea di doppia curvatura, di cui x, y, z sono le coordinate. Se dall'equazioni date in x, y, e z si elimina prima z, e poi y, si avranno due nuove equazioni, una tra x ed y, l'altra tra x e z, le quali rappresentano le projezioni della linea di doppia curvatura nel piano delle x e delle y, e nel piano delle x e delle z; e quest'equazioni si possono usare in luogo delle altre, perchè servono egualmente a determinare i punti della linea di doppia curvatura.

Siano dunque x, y, z le tre coordinate rettangole di una linea di doppia curvatura, ed $y=F.x$, $z=f.x$ le di lei equazioni. Ponghiamo che siano p, q, r le coordinate di nn'altra curva riferita ai medesimi assi, e $q=\phi.p$, $r=\Psi.p$ le di lei equazioni. Se si vuole che queste due curve abbiano un punto comune corrispondente all'ascissa x, posta $p=x$ dovrà essere $q=y$, ed $r=z$, cioè $\phi.x=F.x$, e $\Psi.x=f.x$. Per un altro punto corrispondente

all'ascissa $x+i$ le coordinate y e z della prima curva diventeranno $F.(x+i)$, $f.(x+i)$, e le coordinate q ed r della seconda curva saranno $\phi.(x+i)$, $\Psi.(x+i)$. Quindi la distanza tra i due punti, i quali nelle due curve appartengono all'ascissa $x+i$ sarà $=\sqrt{[(F.(x+i)-\phi.(x+i))^2+(f.(x+i)-\Psi.(x+i))^2]}=\sqrt{(D^2+\Delta^2)}$, se per più semplicità facciamo $D=F.(x+i)-\phi.(x+i)$, $\Delta=f.(x+1)-\Psi.(x+i)$: ed è chiaro che questa distanza sarà tanto più piccola, quanto più piccole saranno le quantità D e Δ.

Ora se svolgiamo queste quantità in serie, e ci ricordiamo che $\phi.x=F.x$ e $\Psi.x=f.x$, avremo

$$D=i\left(\frac{dF}{dx}-\frac{d\phi}{dx}\right)+\frac{i^2}{2}\left(\frac{d^2F}{dx^2}-\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)+\frac{i^3}{2.3}\left(\frac{d^3F}{dx^3}-\frac{d^3\phi}{dx^3}\right)+\text{ec.}$$

$$\Delta=i\left(\frac{df}{dx}-\frac{d\Psi}{dx}\right)+\frac{i^2}{2}\left(\frac{d^2f}{dx^2}-\frac{d^2\Psi}{dx^2}\right)+\frac{i^3}{2.3}\left(\frac{d^3f}{dx^3}-\frac{d^3\Psi}{dx^3}\right)+\text{ec.}$$

ed è evidente che queste quantità D e Δ saranno in generale tanto più piccole, quanti più tra i primi termini del loro sviluppo si annulleranno. Sia infatti $\frac{d\phi}{dx}=\frac{dF}{dx}$ e $\frac{d\Psi}{dx}=\frac{df}{dx}$, cioè siano eguali le funzioni prime derivate dalle coordinate comuni in ambedue le curve, e col solito ragionamento proveremo che si potrà prendere i così piccola, che riescano più grandi i valori di D e Δ relativi ad una terza curva condotta pel punto comune alle due prime, nella quale non abbia luogo la medesima eguaglianza tra le funzioni derivate. Dunque in vicinanza del punto comune sarà maggiore la distanza tra la prima curva e la terza di quella, che si trova tra la prima e la seconda, e per conseguenza la terza curva non potrà passare tra le due prime. E quì applicando le medesime nozioni, che abbiamo dati per i contatti delle curve ordinarie, diremo che le due prime curve contemplate hanno un contatto del prim'ordine. Che se fossero eguali anche le funzioni seconde derivate dalle coordinate comuni, allora il contatto delle due curve sarebbe del second'ordine; e così in seguito.

49.

Prendiamo in luogo della seconda curva una retta qualunque, di cui la posizione sia determinata dall'equazioni $q=a+bp$, $r=c+ep$; avremo $\phi.x=a+bx$, $\Psi.x=c+ex$, $\frac{d\phi}{dx}=b$, $\frac{d\Psi}{dx}=e$. On-

de, perchè questa retta abbia un contatto del prim'ordine, cioè perchè sia tangente della linea di doppia curvatura, di cui l'equazioni sono $y=F.x$, $z=f.x$, dovranno aver luogo le quattro equazioni $a+bx=F.x=y$, $c+ex=f.x=z$, $b=\frac{dF}{dx}=\frac{dy}{dx}$, $e=\frac{df}{dx}=\frac{dz}{dx}$. Determinate per mezzo di esse le costanti a, b, c, e saranno

$$q=y+(p-x)\frac{dy}{dx}$$

$$r=z+(p-x)\frac{dz}{dx}$$

l'equazioni della tangente riferita alle coordinate p, q, ed r.

Le due equazioni trovate appartengono alle projezioni della tangente nel piano delle x ed y, ed in quello delle x e z, e facilmente apparisce, che esse rappresentano (21) le tangenti delle curve piane espresse dall'equazioni $y=F.x$, $z=f.x$, le quali sono le projezioni della linea di doppia curvatura sopra i medesimi piani. Quindi si può concludere, che per condurre la tangente ad una linea di doppia curvatura in un punto dato basta tirare ne'punti corrispondenti le tangenti alle due projezioni di essa; poichè quella retta, che ha queste due tangenti per projezioni, sarà la tangente cercata.

50.

Se nel piano delle x ed y si descrive la projezione di una linea di doppia curvatura, si potrà riguardare questa projezione come l'asse curvilineo della linea di doppia curvatura, al quale essa sia riferita per mezzo delle coordinate z. Questo principio ci somministra un modo facile di trovare la lunghezza dell'arco della linea di doppia curvatura, e l'area della superficie cilindrica, che avendo per base la projezione è terminata alla medesima linea di doppia curvatura. Chiamiamo s l'arco della projezione, facendolo cominciare ad una data ascissa, S l'arco corrispondente della linea di doppia curvatura, U l'area della superficie cilindrica; e supponendo che l'arco s sia disteso in linea retta, la superficie cilindrica si ridurrà ad un piano, sul quale verrà ad essere applicata la linea di doppia curvatura, che potrà allora considerarsi come una curva piana, di cui

le coordinate ortogonali siano s e z. Quindi applicando ad essa le formole trovate (32, 33), e riguardando z, S, ed U come funzioni di s avremo $\frac{dS}{ds}=\sqrt{\left(1+\frac{dz^2}{ds^2}\right)}$, e $\frac{dU}{ds}=z$. Ma poichè s è una funzione di x determinata (33) dall' equazione $\frac{ds}{dx}=\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}$, sarà $\frac{dS}{dx}=\frac{dS}{ds}\cdot\frac{ds}{dx}=\frac{dS}{ds}\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}$, $\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{ds}\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}$, $\frac{dU}{dx}=\frac{dU}{ds}\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}$, e sostituendo di sopra i valori di $\frac{dS}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, $\frac{dU}{ds}$ ricavati da quest'equazioni otterremo $\frac{dS}{dx}=\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dx^2}\right)}$, $\frac{dU}{dx}=z\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}$; cioè saranno S ed U respettivamente le funzioni primitive delle quantità $\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dx^2}\right)}$, e $z\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}$.

51.

Non abbiamo fin quì parlato, che delle funzioni di una sola variabile; passiamo adesso alle funzioni di due o più variabili. Sia $F.(x, y)$ una funzione qualunque delle variabili x ed y tra loro indipendenti; ponghiamo in essa $x+i$ in luogo di x, ed $y+k$ in luogo di y, ove i e k sono due quantità indeterminate, e svolgiamo la funzione $F.(x+i, y+k)$ in una serie ascendente secondo le potenze ed i prodotti di i e k. I coefficienti di i e k saranno nuove funzioni di x ed y, che chiameremo funzioni derivate dalla funzione primitiva $F.(x, y)$: di queste e dei coefficienti seguenti ci proponghiamo di trovar la legge.

La teoria delle funzioni di uua sola variabile ci somministra il modo di trovare lo sviluppo della funzione $F.(x+i, y+k)$ secondo le potenze ed i prodotti di i e k. Incominciamo dal sostituire nella funzione $F.(x, y)$ solamente $x+i$ in luogo di x lasciando y intatta, ed avremo per le cose precedenti.

$$F.(x+i, y)=F.(x, y)+i\frac{dF.(x,y)}{dx}+\frac{i^2}{2}\frac{d^2F.(x,y)}{dx^2}+\text{ec.}$$

ove $\frac{dF.(x,y)}{dx}$, $\frac{d^2F.(x,y)}{dx^2}$, ec. sono le funzioni prima, seconda, ec. derivate da $F.(x, y)$ considerandola come funzione della sola variabile x, cioè riguardando y come costante. Adesso se nel-

le funzioni $F.(x,y)$, $\frac{dF.(x,y)}{dx}$, $\frac{d^2F.(x,y)}{dx^2}$, ec. ponghiamo $y+k$ in luogo di y lasciando intatta x, esse diventeranno respettivamente

$$F.(x,y)+k\frac{dF.(x,y)}{dy}+\frac{k^2}{2}\frac{d^2F.(x,y)}{dy^2}+\frac{k^3}{2.3}\frac{d^3F.(x,y)}{dy^3}+\text{ec.}$$

$$\frac{dF.(x,y)}{dx}+k\frac{d.\frac{dF.(x,y)}{dx}}{dy}+\frac{k^2}{2}\frac{d^2.\frac{dF.(x,y)}{dx}}{dy^2}+\text{ec.}$$

$$\frac{d^2F.(x,y)}{dx^2}+k\frac{d.\frac{d^2F.(x,y)}{dx^2}}{dy}+\frac{k^2}{2}\frac{d^2.\frac{d^2F.(x,y)}{dx^2}}{dy^2}+\text{ec.}$$

ec.

Sostituendo questi valori nella equazione precedente avremo lo sviluppo di $F.(x+i,y+k)$, cioè

$$F.(x+i,y+k)=F.(x,y)+i\frac{dF.(x,y)}{dx}+\frac{i^2}{2}\frac{d^2F.(x,y)}{dx^2}+\text{ec.}$$
$$+k\frac{dF.(x,y)}{dy}+ik\frac{d.\frac{dF.(x,y)}{dx}}{dy}+\text{ec.}$$
$$+\frac{k^2}{2}\frac{d^2F.(x,y)}{dy^2}+\text{ec.}$$

Per più semplicità indicheremo $\frac{dF.(x,y)}{dx}$ col segno $\left(\frac{dF}{dx}\right)$, $\frac{dF.(x,y)}{dy}$ col segno $\left(\frac{dF}{dy}\right)$, $\frac{d.\frac{dF.(x,y)}{dx}}{dy}$ col segno $\left(\frac{d^2F}{dxdy}\right)$, $\frac{d^2.\frac{dF.(x,y)}{dx}}{dy^2}$ col segno $\left(\frac{d^3F}{dxdy^2}\right)$, $\frac{d.\frac{d^2F.(x,y)}{dx^2}}{dy}$ col segno $\left(\frac{d^3F}{dx^2dy}\right)$, e generalmente $\frac{d^n.\frac{d^mF.(x,y)}{dx^m}}{dy^n}$ col segno $\left(\frac{d^{m+n}F}{dx^mdy^n}\right)$. La funzione adunque $\left(\frac{d^2F}{dxdy}\right)$ si formerà dalla funzione F, se prima se ne prenderà la funzione prima derivata rapporto ad x, e poi da

questa la funzione prima derivata rapporto ad y. Così otterremo la funzione $\left(\frac{d^2F}{dx^2dy}\right)$ prendendo la funzione seconda derivata da F per rapporto ad x, e da questa la funzione prima derivata relativamente ad y, ec.

Secondo questa maniera di scrivere la funzione z delle variabili x ed y, allorchè vi si porrà $x+i$ in luogo di x, ed $y+k$ in luogo di y, diventerà

$$z+i\left(\frac{dz}{dx}\right)+\frac{i^2}{2}\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)+\frac{i^3}{2.3}\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right)+\text{ec.}$$
$$+k\left(\frac{dz}{dy}\right)+ik\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)+\frac{i^2k}{2}\left(\frac{d^3z}{dx^2dy}\right)+\text{ec.}$$
$$+\frac{k^2}{2}\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)+\frac{ik^2}{2}\left(\frac{d^3z}{dxdy^2}\right)+\text{ec.}$$
$$+\frac{k^3}{2.3}\left(\frac{d^3z}{dy^3}\right)+\text{ec.}$$

nel quale sviluppo la forma generale dei termini è

$$\frac{i^m}{2.3\ldots m}\cdot\frac{k^n}{2.3\ldots n}\left(\frac{d^{m+n}z}{dx^m dy^n}\right)$$

52.

Nel cercare lo sviluppo della funzione $F.(x+i, y+k)$ abbiamo prima sostituito $x+i$ ad x, e poi $y+k$ ad y. Ora è chiaro che lo sviluppo sarebbe identicamente lo stesso, se invertendo le sostituzioni ponessimo prima $y+k$ in luogo di y, e poi nella serie che ne risulta $x+i$ in luogo di x. Operando in questa seconda maniera, e ponendo z in luogo di $F.(x, y)$ otterremo per lo sviluppo di $F.(x+i, y+k)$ la serie

$$z+k\left(\frac{dz}{dy}\right)+\frac{k^2}{2}\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)+\frac{k^3}{2.3}\left(\frac{d^3z}{dy^3}\right)+\text{ec.}$$
$$+i\left(\frac{dz}{dx}\right)+ik\left(\frac{d^2z}{dydx}\right)+\frac{ik^2}{2}\left(\frac{d^3z}{dy^2dx}\right)+\text{ec.}$$
$$+\frac{i^2}{2}\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)+\frac{i^2k}{2}\left(\frac{d^3z}{dydx^2}\right)+\text{ec.}$$
$$+\frac{i^3}{2.3}\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right)+\text{ec.}$$

Questo secondo sviluppo dovendo essere identico con quello già

ottennto, converrà che sia $\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)=\left(\frac{d^2z}{dydx}\right)$, $\left(\frac{d^3z}{dx^2dy}\right)=\left(\frac{d^3z}{dydx^2}\right)$, $\left(\frac{d^3z}{dxdy^2}\right)=\left(\frac{d^3z}{dy^2dx}\right)$, e generalmente $\left(\frac{d^{m+n}z}{dx^m dy^n}\right)=\left(\frac{d^{m+n}z}{dy^n dx^m}\right)$; onde si può concludere, che nel cercare le funzioni derivate dalla funzione z e relativamente ad x e relativamente ad y possiamo seguire quell'ordine, che più ci piace, sicuri di giunger sempre al medesimo resultato.

53.

Dalla funzione z di due variabili si ricavano adunque le due funzioni prime derivate $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ e $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, che sono i coefficienti di i e k nello sviluppo di z, dopo che vi si è posto $x+i$ ed $y+k$ in luogo di x ed y. Queste funzioni derivate si deducono dalla funzione primitiva z con le medesime regole, che per le funzioni di una sola variabile; infatti nel prendere $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ si considera z come funzione della sola variabile x, e si riguarda z come funzione della sola variabile y nel prendere $\left(\frac{dz}{dy}\right)$. Trovate queste se ne dedurranno nell'istesso modo le funzioni derivate seconde $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)$, la prima delle quali è la funzione prima derivata da $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ relativamente alla medesima variabile x, la seconda è la funzione prima derivata da $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ rapporto alla variabile y, e la terza è la funzione prima derivata da $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ relativamente alla variabile y, o la funzione prima derivata da $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ rapporto alla variabile x, che abbiamo veduto esser lo stesso. E così in seguito si troveranno tutte le funzioni derivate di un ordine più elevato con le medesime regole, che hanno luogo per le funzioni di una sola variabile.

54.

Se z non è espressa esplicitamente per x ed y, ma è data da una equazione tra x. y, e z, siccome questa equazione deve aver luogo qualunque siano x ed y, sussisterà ancora dopo che in luogo di x ed y vi porremo $x+i$ ed $y+k$, qualunque siano i e k. E quindi se dopo queste sostituzioni si sviluppa l'equazione secondo le potenze ed i prodotti di i e k, i termini moltiplicati per un medesimo prodotto di i e k formeranno tant'equazioni separate. Ma i termini moltiplicati per i danno la funzione prima derivata secondo x, i termini moltiplicati per k la funzione prima derivata secondo y, quei che sono moltiplicati per $\frac{i^2}{2}$ danno la funzione seconda derivata secondo x, ec. Dunque essendo proposta una equazione qualunque tra x, y, e z, se riguardando z come funzione di x ed y data da questa equazione prenderemo le diverse funzioni derivate da tutti i suoi termini e per rapporto ad x e per rapporto ad y, avremo per ciascuna operazione una equazione derivata, che chiameremo del prim'ordine, del secondo, ec., in quanto conterrà le funzioni derivate prime, seconde, ec., e da quest'equazioni dedurremo i valori di $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)$, ec.

Sia l'equazione proposta $F.(x, y, z)=0$, e considerando y come costante, e z in conseguenza come funzione di x avremo (8) la funzione prima derivata da $F.(x, y, z)$ relativamente ad x così espressa $\left(\frac{dF}{dx}\right)+\left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)$. Nell'istessa maniera la funzione prima derivata da $F.(x, y, z)$ rapporto ad y sarà $\left(\frac{dF}{dy}\right)+\left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)$; e siccome ciascuna di queste funzioni derivate dev'essere eguale a zero, avremo le due equazioni $\left(\frac{dF}{dx}\right)+\left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)=0$, $\left(\frac{dF}{dy}\right)+\left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)=0$, dalle quali si deduce $\left(\frac{dz}{dx}\right)=-\frac{\left(\frac{dF}{dx}\right)}{\left(\frac{dF}{dz}\right)}$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)=-\frac{\left(\frac{dF}{dy}\right)}{\left(\frac{dF}{dz}\right)}$. Trovate così le funzioni

$\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ espresse per x, y, e z, ricaveremo da esse i valori di $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$ prendendone di nuovo le funzioni prime derivate relativamente ad x ed y, e così in seguito.

I medesimi principj si possono applicare alle funzioni di tre o più variabili per la ricerca delle loro funzioni derivate. Ma questa applicazione è così ovvia, che non merita ulteriore schiarimento, giacchè non si tratta che di ripetere per ciascuna variabile contenuta nella funzione quelle medesime operazioni, che si fanno sulle funzioni di una sola variabile.

55.

Ripigliamo l'equazione $F.(x, y, z)=0$, e nel prendere la funzione derivata da $F.(x, y, z)$, invece di considerare le variabili x ed y tra loro indipendenti, riguardiamo y come funzione di x; la funzione derivata in questa ipotesi sarà anch'essa eguale a zero. Per dimostrar ciò denotiamo col segno $\frac{dz}{dx}$ la funzione derivata da z, allorchè si riguarda y come funzione di x. Abbiamo posto tra due parentesi il segno $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, che indica la funzione derivata da z relativamente ad x considerata come isolata ed indipendente da y, perchè si distinguessero tra loro queste due funzioni derivate. Ciò posto la funzione derivata da $F.(x, y, z)$, allorchè y ed in conseguenza anche z si riguardano come funzioni di x, sarà (8)

$$\left(\frac{dF}{dx}\right)+\left(\frac{dF}{dy}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{dF}{dz}\right)\frac{dz}{dx}.$$

Ma siccome z è funzione di x ed y, ed y si suppone funzione di x, abbiamo pel medesimo num. 8.

$$\frac{dz}{dx}=\left(\frac{dz}{dx}\right)+\left(\frac{dz}{dy}\right)\frac{dy}{dx}.$$

Dunque sostituito questo valore la funzione derivata da $F.(x, y, z)$ nella ipotesi di y funzione di x sarà

$$\left(\frac{dF}{dx}\right)+\left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)+\frac{dy}{dx}\left[\left(\frac{dF}{dy}\right)+\left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)\right];$$

ed è chiaro che questa quantità è $=0$ indipendentemente dal

valore di $\frac{dy}{dx}$ a motivo dell'equazioni $\left(\frac{dF}{dx}\right)+\left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)=0$, $\left(\frac{dF}{dy}\right)+\left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)=0$.

Merita di essere osservato che, qualunque funzione di x ed y sia z, l'equazione

$$\frac{dz}{dx}=\left(\frac{dz}{dx}\right)+\left(\frac{dz}{dy}\right)\frac{dy}{dx}$$

è una equazione identica. Nell'istessa maniera, se indichiamo col segno $\frac{du}{dx}$ la funzione derivata dalla funzione u di tre variabili x, y, z, allorchè si riguardano y, z, ed u come funzioni di x, avremo l'equazione identica

$$\frac{du}{dx}=\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{du}{dy}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{du}{dz}\right)\frac{dz}{dx};$$

e così delle altre.

56.

Lo sviluppo trovato della funzione $F.(x+i, y+k)$ ci somministra il mezzo di svolgere una funzione qualunque di x ed y in una serie ordinata per le potenze ed i prodotti delle variabili x ed y, quando la funzione è suscettibile di una tale evoluzione. Siano $F^{0,0}$, $F^{1,0}$, $F^{0,1}$, $F^{2,0}$, $F^{1,1}$, $F^{0,2}$, ec. le quantità, nelle quali respettivamente si cangiano le funzioni $F.(x, y)$, $\left(\frac{dF}{dx}\right)$, $\left(\frac{dF}{dy}\right)$, $\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^2F}{dxdy}\right)$, $\left(\frac{d^2F}{dy^2}\right)$, ec., allorchè vi si pone $x=0$ ed $y=0$, e generalmente sia $F^{m,n}$ il valore della funzione $\left(\frac{d^{m+n}F}{dx^m dy^n}\right)$ nel caso di x ed y eguali a zero. Siccome lo sviluppo della funzione $F.(x+i, y+k)$ ha luogo, qualunque siano i valori di x ed y, ponendo $x=0$ ed $y=0$ avremo

$$F.(i,k)=F^{0,0}+iF^{1,0}+\frac{i^2}{2}F^{2,0}+\frac{i^3}{2.3}F^{3,0}+\text{ec.}$$
$$+kF^{0,1}+ikF^{1,1}+\frac{i^2k}{2}F^{2,1}+\text{ec.}$$
$$+\frac{k^2}{2}F^{0,2}+\frac{ik^2}{2}F^{1,2}+\text{ec.}$$
$$+\frac{k^3}{2.3}F^{0,3}+\text{ec.}$$

E poichè i e k sono qualunque, potremo adesso porre x in luogo di i, ed y in luogo di k, ed otterremo

$$F.(x,y)=F^{0,0}+xF^{1,0}+\frac{x^2}{2}F^{2,0}+\text{ec.}$$
$$+yF^{0,1}+xyF^{1,1}+\text{ec.}$$
$$+\frac{y^2}{2}F^{0,2}+\text{ec.}$$

nella qual serie la forma generale dei termini è

$$\frac{x^m y^n}{2.3\ldots m.2.3\ldots n}F^{m,n}.$$

Se avessimo $\left(\frac{dz}{dx}\right)=A$, ove A è una funzione data di x ed y, il valore di z sarà rappresentato dalla formola precedente. Ora dall'equazione proposta abbiamo il valore di $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, e da questo possiamo dedurre i valori di $\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dx^2dy}\right)$, $\left(\frac{d^3z}{dxdy^2}\right)$, ec., e generalmente quei di $\left(\frac{d^{m+n}z}{dx^m dy^n}\right)$, purchè m sia eguale o maggiore dell'unità; ma la stessa equazione nulla ci dice sopra i valori di z e di $\left(\frac{d^n z}{dy^n}\right)$, i quali possono esser qualunque: quindi saranno indeterminate le quantità $F^{0,0}$, $F^{0,1}$, $F^{0,2}$, $F^{0,3}$, ec. Ma la serie

$$F^{0,0}+yF^{0,1}+\frac{y^2}{2}F^{0,2}+\frac{y^3}{2.3}F^{0,3}+\text{ec.}$$

rappresenta (17) lo sviluppo di una funzione qualunque di y. Dunque avremo

$$z=f.y+xF^{1,0}+\frac{x^2}{2}F^{2,0}+\frac{x^3}{2.3}F^{3,0}+\text{ec.}$$
$$+xyF^{1,1}+\frac{x^2y}{2}F^{2,1}+\text{ec.}$$
$$+\frac{xy^2}{2}F^{1,2}+\text{ec.}$$

ove $f.y$ è una funzione indeterminata di y. Generalmente nel prendere la funzione primitiva di qualunque funzione derivata conviene aggiungervi una funzione arbitraria di quella variabile, che nella derivazione è stata considerata costante; la qual funzione può essere sparita mediante la derivazione, giacchè è la stessa la funzione derivata da $F.(x, y)$ relativamente ad x, e la funzione nella medesima ipotesi derivata da $F.(x, y)+f.y$.

57.

Data l'equazione primitiva $F.(x, y, z)=0$, da essa si deducono l'equazioni derivate $\left(\frac{dF}{dx}\right)+\left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)=0$, $\left(\frac{dF}{dy}\right)+\left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)=0$, le quali sussistono insieme con la proposta; e quindi qualunque combinazione, che si faccia di queste tre equazioni, può tener luogo dell'equazione primitiva. Se la funzione $F.(x, y, z)$ conterrà due costanti a, b, si potranno queste eliminare col mezzo delle tre equazioni, e si otterrà una equazione derivata in $x, y, z, \left(\frac{dz}{dx}\right), \left(\frac{dz}{dy}\right)$, la quale conterrà due costanti a e b di meno che l'equazione primitiva. Dunque viceversa l'equazione primitiva di una data equazione derivata dovrà comprendere due costanti arbitrarie di più che l'equazione derivata; ma non sarà perciò l'equazione primitiva la più generale, dalla quale la proposta possa esser derivata.

Per trovare questa equazione primitiva più generale si osservi che l'eliminazione di a e b condurrà alla medesima equazione derivata, anche quando a e b non siano costanti, ma si riguardino come funzioni di x ed y, purchè l'equazioni $\left(\frac{dF}{dx}\right)+\left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)=0$, $\left(\frac{dF}{dy}\right)+\left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)=0$ si mantengano le medesime. Ma allorchè si considerano a e b come funzioni di x ed y, la prima di quest'equazioni contiene di più i termini $\left(\frac{dF}{da}\right)\left(\frac{da}{dx}\right)+\left(\frac{dF}{db}\right)\left(\frac{db}{dx}\right)$, e la seconda i termini $\left(\frac{dF}{da}\right)\left(\frac{da}{dy}\right)+\left(\frac{dF}{db}\right)\left(\frac{db}{dy}\right)$: questi termini perciò dovranno annullarsi. Ponendo $b=f.a$ avremo $\left(\frac{db}{dx}\right)=\frac{df.a}{da}\left(\frac{da}{dx}\right)$,

$\left(\frac{db}{dy}\right)=\frac{df.a}{da}\left(\frac{da}{dy}\right)$, e quei termini diventeranno $\left(\frac{da}{dx}\right)\left[\left(\frac{dF}{du}\right)+\left(\frac{dF}{db}\right)\frac{df.a}{da}\right], \left(\frac{da}{dy}\right)\left[\left(\frac{dF}{da}\right)+\left(\frac{dF}{db}\right)\frac{df.a}{da}\right]$; onde essi spariranno insieme, se si prenderà a tale, che soddisfaccia all'equazione $\left(\frac{dF}{da}\right)+\left(\frac{dF}{db}\right)\frac{df.a}{da}=0$, e la funzione $f.a$ rimarrà indeterminata.

Da ciò si deduce che l'equazione primitiva, la quale in generale soddisfà ad una equazione derivata del prim'ordine, deve contenere una funzione arbitraria: e per giungere a questa generale equazione primitiva basta che si conosca una equazione primitiva più particolare $F.(x, y, z)=0$, la quale comprenda due costanti arbitrarie a e b. Si porrà in questa $b=f.a$, e si determinerà a in modo, che soddisfaccia all'equazione $\left(\frac{dF}{da}\right)+\left(\frac{dF}{db}\right)\frac{df.a}{da}=0$, e trovato il valore di a sarà $f.a$ la funzione arbitraria.

58.

L'istesso principio può applicarsi all'equazioni tra un più gran numero di vsriabili. Data una equazione derivata del prim'ordine tra le variabili x, y, z, ed u, ove u si considera come funzione di x, y, e z, ponghiamo che si conosca una di lei equazione primitiva $F.(x, y, z, u)=0$, la quale contenga tre costanti indeterminate a, b, c. La proposta equazione derivata nascerà dalla eliminazione delle tre costanti mediante l'equazioni $F.(x, y, z, u)=0$, $\left(\frac{dF}{dx}\right)+\left(\frac{dF}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)=0$, $\left(\frac{dF}{dy}\right)+\left(\frac{dF}{du}\right)\left(\frac{du}{dy}\right)=0$, $\left(\frac{dF}{dz}\right)+\left(\frac{dF}{du}\right)\left(\frac{du}{dz}\right)=0$; ed è evidente che il resultato della eliminazione sarà lo stesso, anche supposte a, b, c variabili, purchè le tre ultime equazioni si mantengano le medesime. Ma se facciamo $c=f.(a, b)$, e riguardiamo a e b come funzioni di x, y, z, quelle tre equazioni verranno aumentate respettivamente dei termini

$$\left(\frac{dF}{da}\right)\left(\frac{da}{dc}\right)+\left(\frac{dF}{db}\right)\left(\frac{db}{dx}\right)+\left(\frac{dF}{dc}\right)\left(\frac{df}{da}\right)\left(\frac{da}{dx}\right)+\left(\frac{dF}{dc}\right)\left(\frac{df}{db}\right)\left(\frac{db}{dx}\right)$$
$$\left(\frac{dF}{da}\right)\left(\frac{da}{dy}\right)+\left(\frac{dF}{db}\right)\left(\frac{db}{dy}\right)+\left(\frac{dF}{dc}\right)\left(\frac{df}{da}\right)\left(\frac{da}{dy}\right)+\left(\frac{dF}{dc}\right)\left(\frac{df}{db}\right)\left(\frac{db}{dy}\right)$$
$$\left(\frac{dF}{da}\right)\left(\frac{da}{dz}\right)+\left(\frac{dF}{db}\right)\left(\frac{db}{dz}\right)+\left(\frac{dF}{dc}\right)\left(\frac{df}{da}\right)\left(\frac{da}{dz}\right)+\left(\frac{dF}{dc}\right)\left(\frac{df}{db}\right)\left(\frac{db}{dz}\right);$$

i quali dovranno perciò annullarsi. Ora è facile il vedere, che per ottener ciò basta porre

$$\left(\frac{dF}{da}\right)+\left(\frac{dF}{dc}\right)\left(\frac{df}{da}\right)=0$$
$$\left(\frac{dF}{db}\right)+\left(\frac{dF}{dc}\right)\left(\frac{df}{db}\right)=0.$$

Se dunque determinati i valori di a e b per mezzo di quest'equazioni si sostituiscono nell'equazione $F.(x, y, z, u)=0$, essa diventerà l'equazione primitiva generale della proposta, e conterrà la funzione arbitraria $f.(a, b)$.

59.

Data una equazione derivata, la ricerca della di lei equazione primitiva dipende da quei metodi, che nel *Calcolo Integrale* abbiamo insegnati per l'integrazione dell'equazioni dette *a differenze parziali*. Ma siccome potrebbe incontrarsi qualche difficoltà nell'esporre questi metodi secondo i principj dell'analisi delle funzioni derivate, accenneremo il modo di trasportar quì alcuni de' più generali, che appartengono all'equazioni del prim'ordine. Sia dunque proposta l'equazione derivata

$$X\left(\frac{dz}{dx}\right)+Y\left(\frac{dz}{dy}\right)=Z,$$

ove X, Y, Z sono funzioni date di x, y, e z.

Dalla equazione identica (55) $\frac{dz}{dx}=\left(\frac{dz}{dx}\right)+\left(\frac{dz}{dy}\right)\frac{dy}{dx}$ si prenda il valore di $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, e sostituitolo nella proposta, essa diventerà

$$X\frac{dz}{dx}-Z-\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(X\frac{dy}{dx}-Y\right)=0.$$

Per soddisfare a questa ponghiamo

$$(1)\quad \begin{matrix} X\frac{dz}{dx}-Z=0 \\ X\frac{dy}{dx}-Y=0\,, \end{matrix}$$

e da quest'equazioni, nelle quali y e z sono riguardate come funzioni di x potremo (47) passare alle due equazioni primitive $S=a$, $R=b$, ove S ed R sono funzioni date di x, y, z, ed a e b costanti. Ora io dico che ciascuna dell'equazioni $S=a$ ed $R=b$ soddisfà alla proposta. Infatti prendendo dall'equazione $S=a$ le funzioni derivate nella ipotesi di y e z funzioni di x avremo

$$\left(\frac{dS}{dx}\right)+\left(\frac{dS}{dy}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{dS}{dz}\right)\frac{dz}{dx}=0\,.$$

Ma siccome questa equazione è stata dedotta dall'equazioni (1), dovrà esser d'accordo con esse; onde sostituiti in essa i valori di $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$ ricavati dall'equazioni (1), l'equazione che risulta da tali sostituzioni (47), cioè

$$X\left(\frac{dS}{dx}\right)+Y\left(\frac{dS}{dy}\right)+Z\left(\frac{dS}{dz}\right)=0\,,$$

sarà identica. Adesso dalla equazione $S=a$ prendiamo le funzioni derivate relativamente ad x, ed y, riguardando queste variabili come indipendenti, ed avremo $\left(\frac{dS}{dx}\right)+\left(\frac{dS}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)=0$, $\left(\frac{dS}{dy}\right)+\left(\frac{dS}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)=0$, e sostituendo i valori di $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ e $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ nella proposta otterremo

$$X\left(\frac{dS}{dx}\right)+Y\left(\frac{dS}{dy}\right)+Z\left(\frac{dS}{dz}\right)=0\,,$$

che è la precedente equazione identica.

Nell'istesso modo si dimostrerà, che l'equazione $R=b$ soddisfà alla proposta; anzi è facile il vedere che alla medesima soddisfarà anche l'equazione $S+aR=b$, ove a e b sono costanti. Trovata così una equazione primitiva della proposta con due costanti arbitrarie; potremo (57) conseguirne l'equazione primitiva generale. Avremo cioè $F.(x, y, z)=S+aR-b$, e quindi $\left(\frac{dF}{da}\right)=R$, $\left(\frac{dF}{db}\right)=-1$; onde, posta $b=f.a$, dovremo determinare

a dalla equazione $R-\frac{df.a}{da}=0$. Sarà dunque R una funzione di a, e viceversa a sarà una funzione di R, che chiameremo $\phi.R$, e siccome la funzione f è arbitraria, lo sarà ancora la funzione ϕ. Ora essendo b funzione di a, $b-aR$ sarà una funzione indeterminata di R, che chiameremo $\Psi.R$, ed $S=\Psi.R$ sarà la generale equazione primitiva della proposta.

Lo stesso metodo può presentarsi sotto un'altro aspetto. Siccome abbiamo veduto, che tutto si riduce a trovare due particolari equazioni primitive, che soddisfacciano alla proposta, sia $S=a$ una di quest'equazioni. Prendendone le funzioni derivate rapporto ad x ed y avremo $\left(\frac{dS}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)+\left(\frac{dS}{dx}\right)=0$, $\left(\frac{dS}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)+\left(\frac{dS}{dy}\right)=0$, e sostituendo nella proposta i valori di $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ e $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ ricavati da queste otterremo l'equazione

$$X\left(\frac{dS}{dx}\right)+Y\left(\frac{dS}{dy}\right)+Z\left(\frac{dS}{dz}\right)=0,$$

che sarà identica. Infatti dovendo essa sussistere insieme con $S=a$, conviene che sia identica, o che lo divenga quando vi si sostituisca il valore di z in x, y, ed a ricavato da $S=a$; e questo secondo caso non è possibile, perchè quella equazione non contiene a.

Ora prendiamo la funzione derivata dall'equazione $S=a$ nella ipotesi di y funzione di x, ed avremo

$$0=\frac{dS}{dx}=\left(\frac{dS}{dz}\right)\frac{dz}{dx}+\left(\frac{dS}{dy}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{dS}{dx}\right),$$

e sostituendo il valore di $\left(\frac{dS}{dx}\right)$ ricavato dalla equazione identica

$$0=\frac{dS}{dx}=\frac{1}{X}\left(\frac{dS}{dz}\right)\left(X\frac{dz}{dx}-Z\right)+\frac{1}{X}\left(\frac{dS}{dy}\right)\left(X\frac{dy}{dx}-Y\right).$$

Nella medesima maniera, se $R=b$ è un'altra equazione primitiva, che soddisfaccia alla proposta, troveremo

$$0=\frac{dR}{dx}=\frac{1}{X}\left(\frac{dR}{dz}\right)\left(X\frac{dz}{dx}-Z\right)+\frac{1}{X}\left(\frac{dR}{dy}\right)\left(X\frac{dy}{dx}-Y\right).$$

Quindi $S=a$ e $R=b$ saranno l'equazioni primitive dell'equazioni

$$\frac{1}{X}\left(\frac{dS}{dz}\right)\left(X\frac{dz}{dx}-Z\right)+\frac{1}{X}\left(\frac{dS}{dy}\right)\left(X\frac{dy}{dx}-Y\right)=0$$
$$\frac{1}{X}\left(\frac{dR}{dz}\right)\left(X\frac{dz}{dx}-Z\right)+\frac{1}{X}\left(\frac{dR}{dy}\right)\left(X\frac{dy}{dx}-Y\right)=0\,.$$

Ma queste equivalgono alle seguenti

$$X\frac{dz}{dx}-Z=0$$
$$X\frac{dy}{dx}-Y=0:$$

dunque cercando l'equazioni primitive di quest'ultime troveremo l'equazioni richieste $S=a$ ed $R=b$. Questo metodo è simile a quello, che si trova nella *Teoria delle funzioni analitiche*, ma è reso indipendente dalla cognizione della forma, che deve avere la generale equazione primitiva della proposta.

60.

Sia data adesso l'equazione tra quattro variabili x, y, z, ed u

$$X\left(\frac{du}{dx}\right)+Y\left(\frac{du}{dy}\right)+Z\left(\frac{du}{dz}\right)=V,$$

ove sono X, Y, Z, ed V funzioni delle medesime variabili. Prendendo dalla equazione identica (55)
$\frac{du}{dx}=\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{du}{dy}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{du}{dz}\right)\frac{dz}{dx}$ il valore di $\left(\frac{du}{dx}\right)$, e sostituendolo nella proposta, essa diventerà

$$X\frac{du}{dx}-V-\left(\frac{du}{dy}\right)\left(X\frac{dy}{dx}-Y\right)-\left(\frac{du}{dz}\right)\left(X\frac{dz}{dx}-Z\right)=0\,,$$

alla quale soddisfaremo ponendo

$$X\frac{du}{dx}-V=0$$
$$(1)\qquad X\frac{dy}{dx}-Y=0$$
$$X\frac{dz}{dx}-Z=0.$$

Da quest'equazioni, nelle quali y, z, ed u son riguardate come funzioni di x, passeremo all'equazioni primitive $R=a$, $S=b$, $T=c$, ove R, S, e T sono funzioni date di x, y, z, ed u, ed a, b, c costanti; e ciascuna di esse soddisfarà alla proposta. Infatti dalla equazione $R=a$ prendendo le funzioni derivate nella

ipotesi che y, z, ed u siano funzioni di x avremo

$$\left(\frac{dR}{dx}\right)+\left(\frac{dR}{dy}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{dR}{dz}\right)\frac{dz}{dx}+\left(\frac{dR}{du}\right)\frac{du}{dx}=0\,.$$

E siccome questa equazione dev'esser d'accordo con l'equazioni (1), dalle quali è stata dedotta, se in essa sostituiremo i valori di $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{du}{dx}$ ricavati dall'equazioni (1), avremo l'equazione identica

$$X\left(\frac{dR}{dx}\right)+Y\left(\frac{dR}{dy}\right)+Z\left(\frac{dR}{dz}\right)+V\left(\frac{dR}{du}\right)=0\,.$$

Ora se prendiamo dalla equazione medesima $R=a$ le funzioni derivate relativamente ad x, y, z, considerando queste variabili tra loro indipendenti, e deducendone i valori di $\left(\frac{du}{dx}\right)$, $\left(\frac{du}{dy}\right)$, $\left(\frac{du}{dz}\right)$ li sostituiamo nella proposta, giungeremo alla stessa equazione identica. Dunque l'equazione $R=a$, e nell'istesso modo l'equazioni $S=b$, $T=c$, e più generalmente l'equazione $R+aS+bT=c$, ove a, b, c sono costanti, soddisfarà alla proposta.

Adesso secondo il metodo del n.° 58. facendo $F.(x,y,z,u)=R+aS+bT-c$ avremo $\left(\frac{dF}{da}\right)=S$, $\left(\frac{dF}{db}\right)=T$, $\left(\frac{dF}{dc}\right)=-1$; onde dovremo determinare a e b dalle due equazioni

$$S-\left(\frac{df}{da}\right)=0$$

$$T-\left(\frac{df}{db}\right)=0\,.$$

Saranno dunque S e T funzioni indeterminate di a e b, ed in conseguenza a e b funzioni indeterminate di S e T; inoltre $c-aS-bT$ sarà una funzione indeterminata di S e T, per denotar la quale adopreremo il segno $\Psi.(S,T)$. Otterremo pertanto $R=\Psi.(S,T)$, e sarà questa la generale equazione primitiva della proposta. In simil guisa si potranno trovare l'equazioni primitive dell'equazioni derivate del prim'ordine tra un numero qualunque di variabili, nelle quali le funzioni derivate non oltrepassano la prima dimensione.

61.

Ma se una equazione tra $x, y, z, \left(\frac{dz}{dx}\right), \left(\frac{dz}{dy}\right)$ non sarà riducibile ad una tal forma, vediamo qual metodo dovrà adoprarsi per giungere all'equazione primitiva. Sia proposta l'equazione

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)=F.\left(x, y, z, \left(\frac{dz}{dy}\right)\right),$$

ove la caratteristica F rappresenta una funzione data. Se $M=0$ è la di lei equazione primitiva, prendendone le funzioni derivate rapporto ad y, se ne dedurrà il valore di $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, che chiameremo u, espresso per x, y, z, e sarà z una funzione di x ed y determinata dall'equazione $M=0$. Ora la funzione derivata da $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ per rapporto ad y è la stessa, che la funzione derivata da $\left(\frac{dz}{dy}\right)=u$, per rapporto ad x, cioè

$=\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{du}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)=\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{du}{dz}\right)F.(x, y, z, u)$. Ma in vigore della proposta la funzione derivata da $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ relativamente ad y è eguale alla funzione derivata da $F.(x, y, z, u)$ rapporto ad y, cioè $=\left(\frac{dF}{dy}\right)+\left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)+\left(\frac{dF}{du}\right)\left(\frac{du}{dy}\right)+\left(\frac{dF}{du}\right)\left(\frac{du}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)$

$=\left(\frac{dF}{dy}\right)+u\left(\frac{dF}{dz}\right)+\left(\frac{dF}{du}\right)\left(\frac{du}{dy}\right)+u\left(\frac{dF}{du}\right)\left(\frac{du}{dz}\right)$. Dunque avremo l'equazione

$$(1)\quad \left(\frac{du}{dx}\right)-\left(\frac{dF}{du}\right)\left(\frac{du}{dy}\right)+\left[F.(x, y, z, u)-u\left(\frac{dF}{du}\right)\right]\left(\frac{du}{dz}\right)$$
$$-\left(\frac{dF}{dy}\right)-u\left(\frac{dF}{dz}\right)=0,$$

alla quale soddisfarà il valore di u dedotto dalla equazione $M=0$.

Ma essendo l'equazione (1) nel caso contemplato al num. 60., potrà generalmente trovarsi qual funzione di x, y, z debba essere u per soddisfarvi. Converrà formare l'equazioni

$$\frac{du}{dx}-\left(\frac{dF}{dy}\right)-u\left(\frac{dF}{dz}\right)=0$$

$$(2)\quad \frac{dy}{dx}+\left(\frac{dF}{du}\right)=0$$

$$\frac{dz}{dx}-F.(x,y,z,u)+u\left(\frac{dF}{du}\right)=0,$$

e trovatene l'equazioni primitive $R=a$, $S=b$, $T=c$, sarà $R=\phi.(S,T)$ la generale equazione primitiva della equazione (1).

Nella equazione $R=\phi.(S,T)$ ponghiamo $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ in luogo di u, e siccome non abbiamo che la sola funzione derivata $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, potremo supporre x costante, e passare alla equazione primitiva mediante il calcolo delle funzioni di una sola variabile, se non che in luogo della costante arbitraria dovrà porvisi una funzione indeterminata di x. Sia $N=0$ questa equazione primitiva; essa rappresenterà in generale tutte l'equazioni, dalle quali si può ricavare i valori di $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ o sia di u, che soddisfanno alla equazione (1). Ma i valori di u dedotti dall'equazione $M=0$ soddisfanno anch'essi all'equazione (1). Dunque l'equazione $M=0$, cioè l'equazione primitiva della proposta o sarà l'equazione medesima $N=0$, o sarà in questa contenuta, e ne nascerà allorchè si limiterà la generalità della funzione arbitraria.

Prendiamo per un esempio semplicissimo l'equazione $\left(\frac{dz}{dx}\right)=m\left(\frac{dz}{dy}\right)$ ove m è costante. Sarà $F.(x,y,z,u)=mu$, e quindi $\left(\frac{dF}{dy}\right)=0$, $\left(\frac{dF}{dz}\right)=0$, $\left(\frac{dF}{du}\right)=m$; onde l'equazioni (2) diventeranno $\frac{du}{dx}=0$, $\frac{dy}{dx}+m=0$, $\frac{dz}{dx}=0$, e da queste si deducono l'equazioni primitive $u=a$, $y+mx=b$, $z=c$, e perciò $u=\phi.(y+mx,z)$ rappresenta tutti i valori di u, che soddisfanno all'equazione (1). Sia $\Psi.(y+mx,z)$, una funzione arbitraria di $y+mx$, e z, sarà tale anche la funzione $-\frac{\left(\frac{d\Psi}{dy}\right)}{\left(\frac{d\Psi}{dz}\right)}$, che avendo perciò la medesima generalità della funzione $\phi.(y+mx,z)$

potrà porsi in luogo di questa. Pertanto l'equazione $\left(\frac{dz}{dy}\right)=\phi.(y+mx, z)$ si potrà mettere sotto la forma $\left(\frac{d\Psi}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)+\left(\frac{d\Psi}{dy}\right)=0$, e la di lei equazione primitiva sarà $\Psi.(y+mx, z)=f.x$. Siccome essa contiene le due funzioni arbitrarie Ψ ed f, è troppo generale per soddisfare alla proposta, e convien limitare la generalità della funzione f. Prendendo le funzioni derivate avremo $\left(\frac{d\Psi}{dy}\right)+\left(\frac{d\Psi}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)=0$, $m\left(\frac{d\Psi}{dy}\right)+\left(\frac{d\Psi}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)=\frac{df}{dx}$, perchè $\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)=m\left(\frac{d\Psi}{dy}\right)$, onde si deduce $\left(\frac{dz}{dy}\right)=-\frac{\left(\frac{d\Psi}{dy}\right)}{\left(\frac{d\Psi}{dz}\right)}$, $\left(\frac{dz}{dx}\right)=\frac{\frac{df}{dx}-m\left(\frac{d\Psi}{dy}\right)}{\left(\frac{d\Psi}{dz}\right)}$; e sostituendo questi valori nella proposta avremo $\frac{df}{dx}-m\left(\frac{d\Psi}{dy}\right)=-m\left(\frac{d\Psi}{dy}\right)$, cioè $\frac{df}{dx}=0$ e la funzione $f.x$ costante. Dunque l'equazione primitiva della proposta sarà $\Psi(y+mx, z)=$cost:, o sia $z=\phi.(y+mx)$.

L'equazione, che abbiamo considerata in questo esempio, è compresa tra quelle del num. 59, e più facilmente con quel metodo poteva ottenersene l'equazione primitiva. Noi però l'abbiamo a bella posta prescelta per dare un esempio del metodo in generale, giacchè nei casi, nei quali la proposta non è contenuta tra quelle del num. 59, s'incontrano difficoltà insuperabili per passare dall'equazione $R=\phi.(S, T)$ alla sua equazione primitiva $N=0$.

In vista di questi ostacoli ci limiteremo a cercare della proposta una equazione primitiva più particolare. Facciamo nella equazione $R=\phi.(S, T)$ la funzione ϕ eguale ad una costante, cioè consideriamo una dell'equazioni primitive $R=a$, che si ricavano dall'equazioni (a). Ponendovi $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ in luogo di u avremo una equazione derivata tra $x, y, z, \left(\frac{dz}{dy}\right)$, ove potremo supporre x costante, e riguardare z come funzione di y, e la ricerca della funzione primitiva dipenderà dal calcolo delle funzioni

di una sola variabile. Questa equazione primitiva conterrà la costante a ed una funzione arbitraria $f.x$ della variabile x, che è stata supposta costante; e dato il valore conveniente alla funzione arbitraria si ridurrà all'equazione primitiva della proposta. Si sostituisca pertanto il valore trovato di φ nella proposta, e si otterrà una equazione derivata tra $x, f.x$, e $\frac{df}{dx}$, la quale servirà a determinare la funzione $f.x$, e questa determinazione porterà una nuova costante b. Trovata in tal guisa una equazione primitiva della proposta, la quale contiene due costanti arbitrarie a e b, potremo da questa col metodo del num. 57. ricavare la generale equazione primitiva.

Sia proposta per esempio l'equazione

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)=f.\left(\frac{dz}{dy}\right).$$

Avremo $F.(x, y, z, u)=f.u$, e quindi $\left(\frac{dF}{dy}\right)=0$, $\left(\frac{dF}{dz}\right)=0$, $\left(\frac{dF}{du}\right)=\frac{df}{du}$; onde l'equazioni (2) saranno

$$\frac{du}{dx}=0$$
$$\frac{dy}{dx}+\frac{df}{du}=0$$
$$\frac{dz}{dx}-f.u+u\frac{df}{du}=0.$$

La prima di esse ci dà $u=a$, e ponendovi per u il suo valore abbiamo $\left(\frac{dz}{dy}\right)=a$, e prendendo le funzioni primitive $z=ay+\phi.x$. Si deduce da questa $\left(\frac{dz}{dx}\right)=\frac{d\phi}{dx}$, e sostituiti i valori di $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ e $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ nella proposta si ottiene $\frac{d\phi}{dx}=f.a$, e quindi $\phi.x=xf.a+b$, e $z=ay+xf.a+b$. Da questo valore particolare di z se ne può dedurre il generale (57), se si pone $b=\Psi.a$, e si determina a dall'equazione $0=y+x\frac{df.a}{da}+\frac{d\Psi.a}{da}$: cioè si ottiene l'equazione primitiva generale mediante l'eliminazione di a dalle due equazioni

$$z=ay+xf.a+\Psi.a$$
$$y+x\frac{df.a}{da}+\frac{d\Psi.a}{da}=0.$$

62.

In una maniera simile potranno richiamarsi ai principj del calcolo delle funzioni derivate tutti i metodi conosciuti per l'integrazione dell'equazioni a differenze parziali. Rimane adesso da esaminare il caso, in cui una equazione derivata tra le variabili x, y, e z, quantunque due di esse siano tra loro indipendenti, non si presenta sotto l'aspetto di equazione a differenze parziali. Abbiamo di tali equazioni accennata sopra (55) l'origine, osservando che data una equazione tra x, y e z ha luogo insieme con essa l'equazione, che se ne deriva nella ipotesi che y sia funzione di x, la qual'equazione ha la forma

$$(a) \qquad A\frac{dz}{dx}+B+C\frac{dy}{dx}=0,$$

ove A, B, e C sono funzioni di x, y, e z. Vediamo adesso come data l'equazione (a) si possa rimontare alla di lei equazione primitiva.

Allorchè questa equazione (a) è stata derivata da una equazione tra x, y e z, se avessimo prese le funzioni derivate per rapporto ad x ed y considerandole tra loro indipendenti, avremmo ottenute (55) le due equazioni $A\left(\frac{dz}{dx}\right)+B=0$, $A\left(\frac{dz}{dy}\right)+C=0$; dunque queste due equazioni devono esser d'accordo in darci quella medesima equazione primitiva, che ci darebbe l'equazione (a). Ora della equazione $A\left(\frac{dz}{dx}\right)+B=0$, ove y è supposta costante, potremo cercare l'equazione primitiva col calcolo delle funzioni di una sola variabile, ma poi invece della costante arbitraria dovremo porvi una funzione indeterminata di y. Così pure l'equazione primitiva di $A\left(\frac{dz}{dy}\right)+C=0$ conterrà una funzione indeterminata di x. Se dunque determineremo le due funzioni arbitrarie in modo, che le due equazioni primitive ottenute si riducano ad una sola, sarà questa l'equazione primitiva dell'equazione (a). Più semplicemente trovata l'equazione pri-

mitiva di $A\left(\frac{dz}{dx}\right)+B=0$, si sostituirà il valore di z nell' altra $A\left(\frac{dz}{dy}\right)+C=0$, e si determinerà in modo la funzione arbitraria, che anche questa equazione abbia luogo.

Data per esempio l'equazione

$$\frac{dz}{dx}+\frac{2x+z}{x+y}+\frac{2y+z}{x+y}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

formeremo le due equazioni $\left(\frac{dz}{dx}\right)+\frac{2x+z}{x+y}=0$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)+\frac{2y+z}{x+y}=0$, le quali poste sotto la forma $(x+y)\left(\frac{dz}{dx}\right)+2x+z=0$, $(x+y)\left(\frac{dz}{dy}\right)+2y+z=0$ ci danno subito l'equazioni primitive $(x+y)z+x^2=\phi.y$, $(x+y)z+y^2=\Psi.x$. Acciò esse si riducano ad una sola, convien che sia $\phi.y+y^2=\Psi.x+x^2$, ed il modo più generale di soddisfare a questa condizione consiste nel porre ciascuna delle quantità $\phi.y+y^2$, e $\Psi.x+x^2$ eguale ad una costante a; onde $(x+y)z+x^2+y^2=a$ sarà l'equazione primitiva della proposta. Avendo trovata l'equazione $(x+y)z+x^2=\phi.y$ potevamo dedurne il valore di $\left(\frac{dz}{dy}\right)=\frac{1}{x+y}\left(\frac{d\phi}{dy}-z\right)$, e sostituendolo nella equazione $\left(\frac{dz}{dy}\right)+\frac{2y+z}{x+y}=0$ avremmo ottenuto $\frac{d\phi}{dy}+2y=0$, cioè $\phi.y=a-y^2$, come sopra.

63.

Ma nella equazione (*a*) le quantità A, B e C non possono esser qualunque, e devono avere una certa relazione tra loro. Per ritrovarla si osservi (52), che qualunque funzione di x ed y sia z, la funzione derivata da $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ relativamente ad y dev'essere eguale alla funzione derivata da $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ relativamente ad x. Ora abbiamo $\left(\frac{dz}{dx}\right)=-\frac{B}{A}$, e $\left(\frac{dz}{dy}\right)=-\frac{C}{A}$; dunque la funzione derivata da $\frac{B}{A}$ rapporto ad y sarà egnale alla funzione derivata

da $\frac{C}{A}$ rapporte ad x. Se riflettiamo che A e B sono funzioni di x, y, z, e z è funzione di x ed y, la funzione derivata da $\frac{B}{A}$ relativamente ad y sarà

$$\frac{1}{A}\left(\frac{dB}{dy}\right)+\frac{1}{A}\left(\frac{dB}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)-\frac{B}{A^2}\left(\frac{dA}{dy}\right)-\frac{B}{A^2}\left(\frac{dA}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)$$
$$=\frac{1}{A}\left(\frac{dB}{dy}\right)-\frac{C}{A^2}\left(\frac{dB}{dz}\right)-\frac{B}{A^2}\left(\frac{dA}{dy}\right)+\frac{BC}{A^2}\left(\frac{dA}{dz}\right);$$ e così pure

$\frac{1}{A}\left(\frac{dC}{dx}\right)-\frac{B}{A^2}\left(\frac{dC}{dz}\right)-\frac{C}{A^2}\left(\frac{dA}{dx}\right)+\frac{BC}{A^2}\left(\frac{dA}{dz}\right)$ sarà la funzione derivata da $\frac{C}{A}$ relativamente ad x: onde avremo

$$A\left(\frac{dB}{dy}\right)-C\left(\frac{dB}{dz}\right)-B\left(\frac{dA}{dy}\right)-A\left(\frac{dC}{dx}\right)+B\left(\frac{dC}{dz}\right)+C\left(\frac{dA}{dx}\right)=0.$$

Questa è la condizione, che deve aver luogo, perchè la proposta (a) sia derivata da una equazione tra x, y e z; ed è quella medesima, che nel Calcolo Integrale vien chiamata *condizione d'integrabilità*. Ma quì conviene osservare che, se l'equazione primitiva tra x, y e z comprende una costante arbitraria c, la quale non è contenuta nella proposta, e quindi nè pure nella equazione di condizione, dovrà questa verificarsi indipendentemente dal valore di z, cioè essere identica; altrimenti ci darebbe una relazione tra x, y e z, la quale mancando della costante c non potrebbe accordarsi coll'equazione primitiva. Onde viceversa si può concludere, che l'equazione di condizione dev'essere identica, qualunque sia z, perchè la proposta ammetta una equazione primitiva completa contenente una costante arbitraria.

64.

Se l'equazione di condizione non fosse soddisfatta, ciò indicherebbe che non vi è alcuna equazione primitiva, dalla quale la proposta possa esser derivata, e quindi che la proposta non può sussistere, allorchè si rignarda z come funzione delle due variabili indipendenti x ed y, ed in questo senso è assurda. Perchè essa abbia un significato bisogna porre, che y sia realmente funzione di x; poichè la proposta riducendosi allora tra due sole variabili z ed x ammetterà sempre una equazione primitiva.

Ma siccome dalla equazione proposta nulla ci vien detto su questa funzione di x, a cui y dev'essere uguale, essa rimarrà indeterminata, e potrà esser qualunque; o sia potrà prendersi un altra qualunque equazione tra x, y e z, la quale abbia luogo insieme con la proposta. Avremo pertanto (47) due equazioni primitive, una formata dalla relazione assunta tra x ed y, l'altra dedotta dalla combinazione di questa con la proposta, le quali considerate insieme soddisfaranno alla proposta, e conterranno una funzione arbitraria; e riferite alla Geometria rappresenteranno una linea di doppia curvatura. Tutto ciò combina con quello, che abbiamo detto nel Cap. IX. del *Calcolo Integrale* relativamente all'equazioni, le quali non soddisfanno alle condizioni d'integrabilità, e forma il fondamento dei diversi metodi quivi esposti per ottenere le soluzioni delle medesime: onde non ci tratterremo di più su questa materia. Solo aggiungeremo il seguente teorema, il quale ci mostra l'estensione di tali soluzioni. Data una equazione tra tre variabili x, y e z, nella quale non sia adempita la condizione d'integrabilità, si può in qualunque superficie segnare una curva di doppia curvatura, i punti della quale soddisfacciano all'equazione proposta. Infatti dalla equazione della superficie $M=0$, e dalla proposta eliminando z otterremo una equazione derivata in x ed y, di cui l'equazione primitiva sia $N=0$; e queste due equazioni $M=0$ ed $N=0$ prese insieme soddisfaranno alla proposta. Ma le medesime equazioni insieme considerate rappresentano una linea di doppia curvatura descritta sulla data superficie, di cui la projezione è espressa dalla equazione $N=0$. Dunque i punti di questa linea di doppia curvatura soddisfanno alla equazione proposta.

Abbiamo rapidamente percorsi i diversi rami del Calcolo Integrale, e gli abbiamo veduti discender tutti dall'analisi delle funzioni derivate. Le riflessioni che abbiamo fatte sopra alcuni dei metodi, che si usano per l'integrazione dell'equazioni differenziali, possono facilmente estendersi agli altri, e possono tutti richiamarsi ai principj rigorosi del calcolo che abbiamo esposto. Non può adunque rimanere alcun dubbio sulla legittimità dei metodi del Calcolo Differenziale ed Integrale, poichè quantunque possano essere stati dedotti da fondamenti non abbastanza chiari ed accurati, ai medesimi metodi però condu-

cono altri principj, sul rigore dei quali non può nascere alcuna difficoltà.

65.

Passiamo a veder qualche uso delle funzioni derivate di due variabili; ma prima osserviamo che nello sviluppo della funzione $F.(x+i, y+k)$ si possono prendere le quantità i e k così piecole, che la somma dei termini, nei quali i e k hanno la medesima dimensione, sia maggiore di tutti i termini seguenti. Infatti posto $k=\lambda i$ quello sviluppo diventerà

$$F.(x,y)+i\left[\left(\frac{dF}{dx}\right)+\lambda\left(\frac{dF}{dy}\right)\right]+\frac{i^2}{2}\left[\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)+2\lambda\left(\frac{d^2F}{dxdy}\right)+\lambda^2\left(\frac{d^2F}{dy^2}\right)\right]$$
$$+\frac{i^3}{2.3}\left[\left(\frac{d^3F}{dx^3}\right)+3\lambda\left(\frac{d^3F}{dx^2dy}\right)+3\lambda^2\left(\frac{d^3F}{dxdy^2}\right)+\lambda^3\left(\frac{d^3F}{dy^3}\right)\right]+\text{ec.},$$

e qualunque quantità finita sia λ potrà (19) prendersi i così piccola, che un termine qualunque superi la somma di tutti i seguenti: dunque ec. Mediante questo principio potremo rendere più rigorosa la ricerca dei massimi e dei minimi delle funzioni di più variabili, usando un discorso analogo a quello, che abbiamo adoprato (20) per le funzioni di una sola variabile.

In virtù del medesimo principio, se saranno date due serie ordinate per le potenze ed i prodotti ascendenti di i e k, le quali abbiano il medesimo primo termine Ai^mk^n, si dimostrerà col ragionamento più volte usato, che una terza serie, ove il primo termine sia Bi^mk^n, non potrà aver per limiti le due prime, cioè esser maggiore di una e minore dell'altra, se anche il primo termine di essa non sarà eguale a quello delle altre due, cioè $B=A$.

66.

Una equazione tra tre variabili x, y e z, due delle quali x ed y sono tra loro indipendenti, e la terza z è una funzione delle altre due data da questa equazione, riferita alla Geometria rappresenta una superficie curva, di cui x, y e z sono le coordinate: quindi la teoria delle superficie curve dipende dall'analisi delle funzioni di due variabili. Come una linea retta può esser tangente di una curva, così un piano può esser tangente di una superficie. E quì adottando il medesimo principio, con cui ab-

biamo determinate le tangenti delle curve, diremo un piano esser tangente di una superficie curva, quando tra questo piano e la superficie non potrà passare un altro piano qualunque condotto pel punto, in cui il primo incontra la superficie.

Sia dunque $z=F.(x, y)$ l'equazione di una superficie curva riferita alle coordinate rettangole x, y e z, e siano p, q, ed r le coordinate di un piano qualunque prese sopra i medesimi assi, ed $r=a+bp+cq$ l'equazione di questo piano. Perchè esso abbia un punto comune con la superficie, bisogna, che posta $p=x$, e $q=y$ sia $r=z$; onde avremo in primo luogo $a+bx+cy=F.(x, y)=z$, dalla qual'equazione si potrà determinare una delle costanti a, b e c. Adesso per vedere quanto negli altri punti la superficie si allontani dal piano, consideriamo quei punti, che corrispondono alle coordinate $x+i, y+k$. Nella superficie l'ordinata z diventerà $F.(x+i, y+k)$, e nel piano l'ordinata r diventerà $a+b(x+i)+c(y+k)$; onde $F.(x+i, y+k)-a-b(x+i)-c(y+k)$ sarà la distanza dei punti, che nella superficie e nel piano corrispondono alle medesime coordinate $x+i$, e $y+k$. Chiamiamo D questa distanza, e sviluppandola in serie avremo, a motivo di $a+bx+cy=F.(x, y)$,

$$D=i\left[\left(\frac{dF}{dx}\right)-b\right]+k\left[\left(\frac{dF}{dy}\right)-c\right]+\frac{i^2}{2}\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)+ik\left(\frac{d^2F}{dxdy}\right)+\frac{k^2}{2}\left(\frac{d^2F}{dy^2}\right)+\text{ec.}$$

Ponghiamo che svaniscano i coefficienti di i e k, ed avremo $b=\left(\frac{dF}{dx}\right)=\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $c=\left(\frac{dF}{dy}\right)=\left(\frac{dz}{dy}\right)$, e siccome $a+bx+cy=z$ otterremo $a=z-x\left(\frac{dz}{dx}\right)-y\left(\frac{dz}{dy}\right)$. Il piano così determinato sarà tale, che tra esso e la superficie curva non potrà passare alcun altro piano, il quale sia condotto pel punto comune alla superficie e al primo piano. Infatti se chiamiamo Δ la distanza tra i punti, che nella superficie e nel secondo piano corrispondono alle coordinate $x+i$, e $y+k$, la quantità Δ conterrà i termini moltiplicati per i e k, i quali svaniscono nella quantità D, a meno che il secondo piano non coincida col primo. Quindi potranno prendersi i e k così piccole, che la distanza Δ riesca maggiore della distanza D. Il piano adunque determinato nel modo precedente sarà il piano tangente della superficie al punto delle coordinate x, y e z.

Dato il piano della equazione $r=a+bp+cq$, se chiamiamo

β l'inclinazione di esso sul piano delle p e q, cioè delle x ed y, ed α l'inclinazione della linea d'intersezione di questi due piani coll'asse delle p, o delle x, abbiamo (Tom. I. num. 103.) $b=-\text{sen.}\alpha\times\text{tang.}\beta$, $c=-\cos.\alpha\times\text{tang.}\beta$; onde si deduce $\text{tang.}\alpha=\frac{b}{c}$, e $\text{tang.}\beta=\sqrt{(b^2+c^2)}$. Relativamente al piano tangente, di cui l'equazione è

$$r=z-x\left(\frac{dz}{dx}\right)-y\left(\frac{dz}{dy}\right)+p\left(\frac{dz}{dx}\right)+q\left(\frac{dz}{dy}\right),$$

sarà $\text{tang.}\alpha=\frac{\left(\frac{dz}{dr}\right)}{\left(\frac{dz}{dy}\right)}$, e $\text{tang.}\beta=\sqrt{\left[\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]}$; e da questa ultima equazione si ricava $\cos.\beta=\frac{1}{\sqrt{\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]}}$.

67.

Data una superficie curva (Fig. 6), i punti della quale siano determinati da una equazione tra le coordinate rettangole $AP=x$, $PQ=y$, e $QM=z$, nel piano APQ delle coordinate x ed y siano descritte due curve qualunque AS, AT; e ponghiamo che da tutti i punti del contorno $ASQT$ siano condotte delle rette perpendicolari al piano APQ, finchè s'incontrino con la superficie. Queste perpendicolari determineranno un solido, che avrà per base la figura $ASQT$, sarà lateralmente terminato dalle superficie cilindriche condotte perpendicolarmente sulle curve AS, AT, e dai piani perpendicolari a quello delle x ed y tirati lungo le rette SQ, QT, e al disopra verrà circoscritto dalla superficie data. Chiameremo questo solido per più brevità il solido della base $ASQT$, e siccome dev'essere una funzione di x ed y, lo faremo eguale a $F.(x, y)$. Se accresciamo l'ascissa AP di $PP'=i$, e formiamo il rettangolo $PP'Q'Q$, il quale sia tagliato dalla curva AS prolungata in SS', sarà il solido della base $SS'Q'Q=F.(x+i,y)-F.(x,y)$. Adesso prolungando la coordinata PQ della retta $Qq=k$, e formando il rettangolo $Qqq'Q'$ avremo il solido della base $SS'q'q=F.(x+i, y+k)-F.(x, y+k)$, e togliendo da questo il solido della base $SS'Q'Q$ otterremo finalmente il solido della base $Qqq'Q'$

$=F.(x+i, y+k) - F.(x, y+k) - F.(x+i, y) + F.(x, y)$, e riducendo queste funzioni in serie troveremo che il primo termine dello sviluppo di questo solido è $=ik\left(\frac{d^2F}{dxdy}\right)$. Ora se prendiamo i e k così piccole, che per tutto lo spazio $Qqq'Q'$ la z non sia massima o minima, è chiaro che il solido della base $Qqq'Q'$ avrà per limiti due dei quattro prismi, che hanno la medesima base $Qqq'Q'=ik$, e le altezze $QM=z$,

$Q'M'=z+i\left(\frac{dz}{dx}\right)+\frac{i^2}{2}\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)+$ec., $qm=z+k\left(\frac{dz}{dx}\right)+\frac{k^2}{2}\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)+$ec.,

$q'm'=z+i\left(\frac{dz}{dx}\right)+k\left(\frac{dz}{dy}\right)+$ec., cioè sarà minore del più grande, e maggiore del più piccolo di questi prismi. Ma essi hanno per primo termine del loro sviluppo la medesima quantità ikz; dunque (65) sarà $\left(\frac{d^2F}{dxdy}\right)=z$, e da questa equazione converrà determinare la funzione $F.(x, y)$, cioè la misura del solido della base $ASQT$.

Sia $P.(x, y)$ la funzione primitiva di z presa prima relativamente ad x, e poi relativamente ad y; avremo $F.(x, y)=P.(x, y)+\phi.x+\Psi.y$, ove le funzioni $\phi.x$ e $\Psi.y$ sono arbitrarie, e la loro determinazione dipende dalla natura delle curve AS, AT. Infatti se queste curve si riducono alle rette AP, AR, in modo che si cerchi il solido, che ha per base il rettangolo $APQR$, è evidente che la funzione $F.(x, y)$ dovrà svanire quando $x=0$ qualunque sia y, e quando $y=0$ qualunque sia x. Sarà dunque $P.(0, y)+\phi.0+\Psi.y=0$, $P.(x, 0)+\phi.x+\Psi.0=0$, $P.(0, 0)+\phi.0+\Psi.0=0$, onde avremo $\phi.x+\Psi.y=-P.(x, 0)-P.(0, y)+P.(0, 0)$, ed il solido della base $APQR$ avrà per espressione $P.(x,y)-P.(x,0)-P.(0,y)+P.(0,0)$. Se determiniamo la funzione primitiva $P.(x, y)$ in modo, che svanisca quando $x=0$ e quando $y=0$, sarà $P.(0,y)=0$, $P.(x,0)=0$, $P.(0,0)=0$, ed il medesimo solido sarà più semplicemente espresso dalla quantità $P.(x, y)$.

Se da questa quantità togliamo i solidi delle basi ASP ed ATR, avremo il solido della base $ASQT$. Ma siccome nella curva AS è PS funzione di AP cioè di x, il solido della base ASP è una funzione X di x; e così pure il solido della base ATR è una funzione Y di y. Quindi il solido della base $ASQT$

è $=P.(x,y)-X-Y$; e perciò relativamente a questo solido $\phi.x=-X$, e $\Psi.y=-Y$: onde per determinare le funzioni arbitrarie fà d'uopo trovare la misura del solido della base ASP, e di quello della base ATR.

68.

L'ordinata PS della curva AS è una funzione di x, che chiameremo $f.x$, ed il solido della base ASP è similmente una funzione di x, che denoteremo col segno $\Gamma.x$. Se accresciamo l'ascissa AP di $PP'=i$, avremo il solido della base $ASS'P'=\Gamma.(x+i)$, ed il solido della base $PSS'P'=\Gamma.(x+i)-\Gamma.x$; onde sarà $i\frac{d\Gamma}{dx}$ il primo termine dello sviluppo di questo solido. Ora se prendiamo (Fig. 7) $PQ=y$, e chiamiamo u il solido della base $PQQ'P'$, avremo $\left(\frac{d^2u}{didy}\right)=z+i\left(\frac{dz}{dx}\right)+\frac{i^2}{2}\frac{d^2z}{dx^2}+$ec. Sia $Q.(x,y)$ la funzione primitiva di z presa per rapporto ad y, e talmente determinata, che svanisca quando $y=0$, ed avremo $\left(\frac{du}{di}\right)=Q.(x+i,y)=Q.(x,y)+i\left(\frac{dQ}{dx}\right)+\frac{i^2}{2}\left(\frac{d^2Q}{dx^2}\right)+$ec. Onde prendendo la funzione primitiva relativamente ad i otterremo $u=iQ.(x,y)+\frac{i^2}{2}\left(\frac{dQ}{dx}\right)+$ec., ove non si aggiunge la funzione arbitraria di y, perchè u deve svanire quando $i=0$. Sarà dunque $iQ.(x,y)$ il primo termine dello sviluppo di u, e posta $y=f.x$ sarà $iQ.(x,f.x)$ il primo termine dello sviluppo del solido, che ha per base $PSsP'$. Questo solido si cangia in quello della base $Ps'S'P'$, se invece di $f.x$ vi si pone $f.(x+i)$; onde apparisce che anche il solido della base $Ps'S'P'$ ha per primo termine del suo sviluppo la medesima quantità $iQ.(x,f.x)$. Ma i due solidi contemplati sono i limiti, tra i quali cade il solido della base $PSS'P'$; dunque avremo $\frac{d\Gamma}{dx}=Q.(x,f.x)$, e $\Gamma.x=$ alla funzione primitiva di $Q.(x,f.x)$.

Dall'analisi precedente si deduce, che per avere il solido della base ASP dobbiamo prima prendere la funzione primitiva di z relativamente ad y, considerando x ed y come tra loro indipendenti, e determinarla in modo, che svanisca quando $y=0$; poi sostituendo $f.x$ in luogo di y in questa funzione pri-

mitiva, con che diventerà una funzione di x, dobbiamo prendere di quest'ultima funzione di x la funzione primitiva. Nell'istessa maniera per ottenere il solido della base ATR prenderemo la funzione primitiva di z relativamente ad x, riguardando x ed y come tra loro indipendenti; poi in questa funzione primitiva porremo il valore di x in y dato dalla curva AT, e finalmente della funzione di y, che risulta da questa sostituzione, prenderemo la funzione primitiva.

69.

Passiamo a cercare la misura della superficie curva, che corrisponde (Fig. 6) all'area $ASQT$, e di cui quest'area è la projezione. Se indichiamo tal porzione della superficie con $F.(x, y)$, dimostreremo come sopra (67) che la superficie $MM'm'm$, di cui la projezione è il rettangolo $Qqq'Q'$ ha per primo termine del suo sviluppo $ik\left(\frac{d^2F}{dxdy}\right)$. Conduciamo pel punto M (Fig. 8) il piano tangente, il quale incontri in X, T ed V le coordinate $Q'M'$, qm e $q'm'$, e tiriamo le rette MM', Mm, mm', $M'm'$ ed Mm'. Poste i e k così piccole, che la superficie $MM'm'm$ abbia in tutti i suoi punti la curvatura voltata verso la medesima parte, è chiaro che il quadrilatero $MXVT$ insieme con i due triangoli rettilinei $MM'X$, MmT ed i due trapezj rettilinei $mTVm'$, $M'XVm'$ forma un'area maggiore della superficie curva $MM'm'm$; ed all'opposto i due triangoli $MM'm'$, Mmm' presi insieme formano un'area minore della medesima superficie curva.

Cerchiamo il primo termine dello sviluppo di questi due limiti; e primieramente siccome c'insegna la Geometria, che l'area del quadrilatero $MXVT$ è eguale alla sua projezione $QQ'q'q$ divisa pel coseno della inclinazione del piano del quadrilatero con quello della projezione, il qual coseno (66) è $\frac{1}{\sqrt{\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]}}$, avremo l'area del quadrilatero $MXVT=ik\sqrt{\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]}$. Il triangolo $MM'X$ ha per altezza $QQ'=i$, e per base $M'X=-\frac{i^2}{2}\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)-\frac{i^3}{2.3}\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right)$-ec.;

dunque l'area del triangolo avrà il primo termine moltiplicato per i^2. Così pure vedremo che il triangolo MmT, ed i quadrilateri $mTVm'$, $M'XVm'$ hanno il primo termine del loro sviluppo della terza dimensione per rapporto ad i e k. Dunque $ik\sqrt{\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]}$ è il primo termine dello sviluppo del limite maggiore della superficie curva $MM'm'm$.

Nel triangolo $Mm'M'$ abbiamo $\overline{MM'}^2=\overline{QQ'}^2+(Q'M'-QM)^2$, $\overline{Mm'}^2=\overline{Q'q'}^2+(q'm'-Q'M')^2$, ed $\overline{Mm'}^2=\overline{QQ'}^2+\overline{Q'q'}^2+(q'm'-QM)^2$. Sostituendo i valori di queste rette QQ', QM, ec. troveremo che il primo termine dello sviluppo di $\overline{MM'}^2$ è $=i^2\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]$, che il primo termine dello sviluppo di $\overline{M'm'}^2$ è $=k^2\left[1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]$, che finalmente i primi termini dello sviluppo di $\overline{Mm'}^2$ sono $=i^2+k^2+\left[i\left(\frac{dz}{dx}\right)+k\left(\frac{dz}{dy}\right)\right]^2$. Ma l'area del triangolo $MM'm'$ è noto essere $=\frac{1}{4}\sqrt{\left[4\overline{MM'}^2.\overline{M'm'}^2-\left(\overline{MM'}^2+\overline{M'm'}^2-\overline{Mm'}^2\right)^2\right]}$; dunque il primo termine dello sviluppo di quest'area sarà $\frac{1}{4}\sqrt{\left[4i^2k^2\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)\left(1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)-4i^2k^2\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]}$ $=\frac{1}{2}ik\sqrt{\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]}$. Col medesimo calcolo troveremo, che l'area del triangolo Mnm' ha per primo termine del suo sviluppo la quantità $\frac{1}{2}ik\sqrt{\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]}$. Dunque $ik\sqrt{\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]}$ è il primo termine dello sviluppo del limite minore della superficie curva $MM'm'm$. Avendo pertanto i due limiti il medesimo primo termine $ik\sqrt{\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]}$, ed il primo termine dello sviluppo della superficie $MM'm'm$, la quale deve cadere tra questi limiti, essendo $ik\left(\frac{d^2P}{dxdy}\right)$, ne segue (65) che

$$\left(\frac{d^2F}{dxdy}\right)=\sqrt{\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]}.$$

Se $Q.(x,y)$ rappresenta la funzione primitiva della quantità $\sqrt{\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]}$ presa prima relativamente ad una delle variabili x ed y, e poi relativamente all'altra, e questa funzione primitiva si determina in modo, che svanisca quando $x=0$, e quando $y=0$, otterremo il valore di $F.(x,y)$ cioè della superficie curva, che ha per projezione l'area $ASQT$ (Fig. 6) così espresso; $Q.(x,y)+\phi.x+\Psi.y$. Le funzioni arbitrarie $\phi.x$ e $\Psi.y$ devono in modo determinarsi, che sia $-\phi.x$ eguale alla superficie curva, la quale ha per projezione ASP, e $-\Psi.y$ eguale alla superficie curva, che ha per projezione ATR. Non mi trattengo sulla maniera di misurare queste due ultime superficie, perchè è affatto simile a quella esposta al num. 68. con la sola differenza, che bisogna considerare la funzione $\sqrt{\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]}$ in luogo della funzione z.

I medesimi principj, con i quali abbiamo determinato il piano tangente, potrebbero applicarsi alla ricerca dei diversi contatti, che hanno tra loro le superficie curve, nel modo praticato relativamente alle linee curve. Ma noi contenti di avere indicata la strada rimetteremo per questa e per altre ricerche i nostri leggitori alla *Teoria delle funzioni analitiche* di *Lagrange*, dalla quale abbiamo estratta la maggior parte delle cose esposte. Noi ci siamo proposti in questo Opuscolo di facilitare l'accesso a quest'Opera eccellente, la lettura della quale non può abbastanza raccomandarsi agli studiosi dell'Analisi. E se in qualche parte ci siamo alquanto scostati dalla via tenuta da quel gran Geometra, non pretendiamo di averne scelta una migliore, ma quella che era più analoga al metodo tenuto nel Tomo precedente, e più adattata a porre in evidenza quei rapporti tra l'Analisi delle funzioni derivate ed il Calcolo Differenziale ed Integrale, che in quell'Opera non erano bastantemente indicati.

OPUSCOLO II.

SULLA RISOLUZIONE DELL' EQUAZIONI.

In questo Opuscolo ci proponghiamo di trattare con qualch'estensione di alcuni punti relativi alla teoria dell'equazioni, e specialmente di dare dietro alle traccie luminose segnate dall' immortale *Lagrange* una qualche idea dei principj generali, dai quali dipende la risoluzione delle medesime. Quantunque sembri a prima vista, che i metodi particolari esposti nel Tomo I. per trovar le radici dell'equazioni del secondo, terzo, e quarto grado non abbiano tra loro alcun rapporto, pure esaminandoli più attentamente vedremo, che in ciascuno di essi abbiamo procurato di ottenere una trasformata, la risoluzione della quale dipendeva da quella dell'equazioni di un grado inferiore, e trovate le radici di questa trasformata potevano da esse facilmente dedursi le radici della proposta. Così per esempio data l'equazione del quarto grado

$$x^4+px^2+qx+r=0$$

abbiamo ottenuta la trasformata del terzo

$$m^3+2pm^2+(p^2-4r)m-q^2=0\,,$$

ove m era $=e^2$, ed e essendo il coefficiente del secondo termine del fattore di secondo grado $x^2-ex+f=0$ rappresentava la somma di due radici della proposta; dunque la trasformata in m aveva per radici i quadrati delle somme di due qualunque tra le radici della proposta.

Qualunque si consideri dei metodi conosciuti, si vedrà sempre che tutti in sostanza si riducono alla ricerca di una trasformata, che abbia le precedenti condizioni; e questo e il principio generale, dal quale dipendono tutti i metodi noti, e quelli che di nuovo potrebbero immaginarsi. Si può vedere un tale esame dei varj metodi proposti per la risoluzione dell'equazioni magistralmente eseguito dal sommo Geometra *Lagrange* nelle

di lui *Riflessioni sulla risoluzione algebrica dell'equazioni* pubblicate tra le Memorie dell'Accademia di Berlino degli anni 1770 e 1771.

Le radici di una trasformata qualunque hanno una data relazione con le radici della proposta, o sia sono funzioni di queste. Quindi la risoluzione di una equazione si riduce alla ricerca di tali funzioni delle radici della proposta, che in primo luogo l'equazioni, delle quali queste funzioni sono radici, siano di un grado inferiore a quello della proposta, o siano trasformabili in altr'equazioni, che abbiano questa condizione; in secondo luogo che si possa da queste funzioni facilmente ricavare i valori delle radici della proposta. Trarremo in seguito da questo principio un metodo diretto per risolvere l'equazioni dal secondo al quarto grado; ma prima convien fare alcune generali osservazioni sulle trasformate.

1.

Chiamando x', x'', x''', ... $x^{(m)}$ le radici di una proposta equazione del grado m indicheremo col segno

$f.(x')(x'')(x''')\ldots(x^{(p)})$ una funzione di tutte o di alcune di queste radici, secondo che sarà $p=m$, o $p<m$. Ma se la funzione fosse tale, che non cangiasse valore quando si permutano tra loro le radici x', x'', per denotare questo accidente ci serviremo del segno $f.(x', x'')(x''')(x^{IV})\ldots(x^{(p)})$. Tale sarebbe la funzione $x'^2+x''^2+2x'''^2$, la quale si mantiene la medesima, allorchè si varia x' con x''. Questa costanza di valore nasce dalla forma della funzione, ed è indipendente dal valore delle radici x', x'', le quali possono esser qualunque.

Il valore di una funzione può mantenersi il medesimo per una data permutazione anche indipendentemente dalla di lei forma; ma in tal caso le radici, che entrano in questa permutazione non possono esser qualunque, e devono aver tra loro un particolare rapporto. Così per la permutazione di x' in x'' la funzione $2x'+3x''+4x'''$ si cangia in $2x''+3x'+4x'''$, e può mantenersi del medesimo valore, ma convien che sia $2x'+3x''=2x''+3x'$, cioè $x''=x'$. Bisogna distinguer bene questi due casi, ed io intendo adesso di parlare del primo.

Nella stessa maniera il segno $f.(x', x'', x''')(x^{IV}) \ldots (x^{(p)})$ indica una funzione, che per la sua forma non muta valore, allorchè si cangiano in qualunque modo tra loro le tre radici x', x'', x'''. Se la funzione $f.(x', x'')(x''')(x^{IV})(x^{V}) \ldots (x^{(p)})$ si mantiene la medesima, anche quando si cangia x''' in x^{IV}, la denoteremo col segno $f.(x', x'')(x''', x^{IV})(x^{V}) \ldots (x^{(p)})$. E così in seguito.

Si chiamano simili quelle funzioni, che sono rappresentate da una medesima forma, e contengono le medesime radici; dissimili quelle che sono rappresentate da forme diverse. Sono simili perciò le funzioni $f.(x')(x'')x'''$), $F.(x')(x'')(x''')$, e così pure le funzioni $f.(x', x'')(x''')$, $F.(x', x'')(x''')$; dissimili le funzioni $f.(x', x'')(x''')$, $F.(x')(x'')(x''')$. Le funzioni simili a qualunque permutazione tra le radici o si mutano ambedue, o restano ambedue le medesime. Lo stesso non accade nelle funzioni dissimili, perchè per esempio la funzione $f.(x', x'')(x''')$ non si muta quando si cangia x' con x'', ma per la stessa permutazione si muta il valore della funzione $F.(x')(x'')(x''')$.

2.

Data adesso una equazione del grado m, di cui le radici siano $x', x'', x''' \ldots x^{(m)}$, si debba trovare una di lei trasformata qualunque, cioè una nuova equazione, che abbia per radice la funzione $f.(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(m)})$, la quale suppongo razionale. Chiamata $T=0$ questa trasformata, e t la di lei incognita, la quantità T sarà eguale al prodotto di tanti fattori semplici

$$t-f.(x')(x'')(x''')(x^{IV}) \ldots (x^{(m)})$$
$$t-f.(x'')(x')(x''')(x^{IV}) \ldots (x^{(m)})$$
$$t-f.(x''')(x'')(x')(x^{IV}) \ldots (x^{(m)})$$
ec.

quante sono tutte le possibili permutazioni tra le m radici $x', x'', x''', x^{IV} \ldots x^{(m)}$. Ma il numero di queste è noto essere $1.2.3.4 \ldots m$; dunque il grado dell'equazione $T=0$, che chiameremo n, sarà in generale $=1.2.3 \ldots m$.

Per trovare tutti i fattori, senza ometterne alcuno, sarà bene di tenere un cert'ordine nell'eseguire le permutazioni. Data la funzione $f.(x')(x'')(x''')\ldots$ s'incomincierà dal cangiare x'' in x' e viceversa, e si avrà due funzioni; poi in queste si muterà x''' prima in x' e poi in x'', e si avrà in tutto sei funzioni; ora in ciascuna di queste sei funzioni si cangerà x^{IV} successivamente in x', in x'', in x''', ed avremo in tutto 24 funzioni, e così in seguito finchè si giunga all'ultima radice $x^{(m)}$.

Trovate tutte le diverse funzioni ed i corrispondenti fattori, dalla moltiplicazione di questi si otterrà l'equazione $T=0$, che avrà la forma

$$t^n - At^{n-1} + Bt^{n-2} - Ct^{n-3} + \text{ec.} = 0,$$

ove sarà $A=$ alla somma di tutte le funzioni trovate, $B=$ alla somma di tutti i prodotti delle medesime funzioni a due a due, ec. E siccome la funzione proposta è razionale, e nel valore delle quantità A, B, C, ec. tutte entrano egualmente le radici della proposta, potranno queste quantità A, B, C, ec. esprimersi razionalmente per mezzo dei coefficienti della proposta con quelle regole, che abbiamo date nel Tomo I., e più generalmente daremo in appresso.

3.

Quantunque in generale il grado n della trasformata sia $=1.2.3\ldots m$, cioè al numero di tutte le permutazioni tra le radici $x', x'', x''' \ldots x^{(m)}$, pure se la funzione proposta in grazia della sua forma non soffrirà variazione per alcuna di queste permutazioni, l'equazione $T=0$ si abbasserà necessariamente di grado. Poichè supponghiamo per esempio la forma della funzione $f.(x')(x'')(x''')(x^{IV})\ldots$ esser tale, che essa conservi il medesimo valore, quando si cangia x' in x''', cioè quando delle radici contenute nella funzione la prima si cangia nella terza; in modo che sia

$$f.(x')(x'')(x''')(x^{IV})\ldots = f.(x''')(x'')(x')(x^{IV})\ldots$$

L'equazione $T=0$ avrà queste due radici eguali; ma è facile il provare che tutte le altre radici saranno eguali a due a due. Prendiamo infatti un'altra radice qualunque $f.(x'')(x''')(x')(x^{IV})\ldots$, e siccome questa per la sua forma mantiene il proprio va-

lore, quando la prima radice x'' si cangia nella terza x', avremo

$$f.(x'')(x''')(x')(x^{IV}) \ldots . = f.(x')(x''')(x'')(x^{IV}) \ldots$$

Dunque la quantità T sarà eguale ad un quadrato $T_1{}^2$, e perciò l'equazione $T=0$ potrà ridursi a $T_1=0$: il grado di questa ultima trasformata sarà $\frac{n}{2}$, ed essa avrà per radici tutti i valori della funzione data, che sono differenti di forma.

Ponghiamo adesso che la forma della funzione $f.(x')(x'')(x''')(x^{IV}) \ldots .$ sia tale, che essa mantenga il suo valore, allorchè si cangia contemporaneamente x' in x'', x'' in x''', ed x''' in x', cioè la prima radice nella seconda, la seconda nella terza, e la terza nella prima, e sia perciò

$$f.(x')(x'')(x''')(x^{IV}) \ldots . = f.(x'')(x''')(x')(x^{IV}) \ldots ,$$

La funzione $f.(x'')(x''')(x')(x^{IV}) \ldots .$ ci darà in grazia della sua forma

$$f.(x'')(x''')(x')(x^{IV}) \ldots . = f.(x''')(x')(x'')(x^{IV}) \ldots .$$

e la funzione $f.(x''')(x')(x'')(x^{IV}) \ldots .$ similmente ci darà

$$f.(x''')(x')(x'')(x^{IV}) \ldots . = f.(x')(x'')(x''')(x^{IV}) \ldots .$$

ove l'ultima funzione ottenuta è la stessa, che la prima. Dunque le tre funzioni $f.(x')(x'')(x''')(x^{IV}) \ldots$, $f.(x'')(x''')(x')(x^{IV}) \ldots$, $f.(x''')(x')(x'')(x^{IV}) \ldots .$ saranno eguali tra loro, e diverse dalle altre; ma anche queste altre saranno eguali a tre a tre, e perciò l'equazione $T=0$, ridotta che sia, sarà del grado $\frac{n}{3}$. Nell'istesso modo si dimostrerà che, se la funzione proposta per le permutazioni tra le radici x', x'', x''', ec. conserverà il medesimo valore in quattro o più maniere, il grado della trasformata ridotta sarà $=\frac{n}{4}$, o ec.

Pertanto se la funzione proposta è della forma $f.(x', x'')(x''')(x^{IV}) \ldots .$, la quale ha la proprietà di restar la medesima pel cangiamento di x' in x'', il grado della trasformata ridotta sarà $\frac{1.2.3 \ldots m}{2}$. Così se la funzione avrà la forma $f.(x', x'', x''')(x^{IV}) \ldots .$, la quale non cangia a qualunque permutazione tra le radici x', x'', x''', siccome il numero di queste permutazioni è $=1.2.3$, sarà il grado della trasformata

$= \frac{1.2.3 \ldots m}{1.2.3}$. Similmente se la funzione avrà la forma $f.(x', x'')(x''', x^{IV})(x^{V}) \ldots$, il grado della trasformata riescirà $= \frac{1.2.3 \ldots m}{1.2.1.2}$; e più generalmente se la forma della funzione fosse

$$f.(x', x'', x''' \ldots, x^{(p)})(x^{(p+1)}, x^{(p+2)}, x^{(p+3)}, \ldots, x^{(q)}) \ldots$$

il grado della trasformata sarebbe $\frac{1.2.3 \ldots m}{1.2 \ldots p.1.2 \ldots q \ldots}$. E la funzione della forma $f.(x', x'', x''' \ldots, x^{(m)})$, la quale ha la proprietà di mantenersi invariabile a qualunque permutazione tra le radici della proposta, dipenderà da una equazione del grado $\frac{1.2.3 \ldots m}{1.2.3 \ldots m} = 1$, cioè del primo grado, e sarà perciò determinabile razionalmente per i coefficienti della proposta. Lo che così esser deve, perchè quella funzione tutte egualmente contiene le radici della proposta.

4.

Fin quì abbiamo supposto, che la funzione data contenesse tutte le m radici della proposta; ponghiamo adesso che ne contenga un minor numero p, in modo che sia rappresentata da $f.(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(p)})$. È chiaro che a questa funzione potremo dare la forma

$$f.(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(p)})(x^{(p+1)}, x^{(p+2)}, x^{(p+3)} \ldots, x^{(m)}),$$

considerandovi ciascuna delle radici $x^{(p+1)}, x^{(p+2)}, \ldots x^{(m)}$ moltiplicata per coefficienti $=0$. Dunque il grado della trasformata sarà $\frac{1.2.3 \ldots . m}{1.2.3 \ldots (m-p)}$; e questo grado potrà anche divenir minore secondo la forma, che avrà la funzione data relativamente alle radici $x', x'', x''', \ldots x^{(p)}$. Così se la funzione avesse la forma $f.(x', x'', x''', \ldots x^{(p)})$, il grado della trasformata sarebbe $\frac{1.2.3 \ldots m}{1.2.3 \ldots p.1.2.3.(m-p)} = \frac{m(m-1)(m-2) \ldots (m-p+1)}{1.2.3 \ldots p}$. Quindi se si volesse una equazione

$$x^p + ax^{p-1} + bx^{p-2} + cx^{p-3} + \text{ec.} = 0,$$

la quale avesse tutte le sue radici comuni con la proposta, cioè fosse un di lei fattore, i coefficienti a, b, c, ec., che sono funzioni della forma $f.(x', x'', x''', \ldots, x^{(p)})$, dipenderebbero da una equazione del grado $\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)}{1.2.3\ldots p}$.

5.

Dalle cose precedenti apparisce 1.° che il grado n di una trasformata qualunque, la quale abbia per radice una funzione razionale delle radici della proposta, sarà sempre eguale al numero $1.2.3\ldots m$, o ad un divisore di questo numero; 2.° che le funzioni simili delle radici condurranno a trasformate del medesimo grado; 3.° che in qualunque caso si può trovare direttamente la trasformata, la quale ha per radici i diversi valori della funzione data. Adesso passeremo a mostrare, che questa trasformata non solo ci somministrerà il valore della funzione data, ma che potrà da essa ricavarsi il valore di qualunque altra funzione delle radici della proposta, senza che vi sia bisogno di calcolare la trasformata, di cui la seconda funzione sia radice. Sia dunque

$$T=t^n+At^{n-1}+Bt^{n-2}+Ct^{n-3}+\text{ec.}=0.$$

la trasformata, che ha per radici tutti i valori differenti della funzione t. Chiamiamo y quella seconda funzione, di cui cerchiamo il valore dipendentemente da quello di t, e supponghiamo in primo luogo che queste due funzioni siano simili. Denotiamo con i segni t', t'', t''', $\ldots$ $t^{(n)}$ i valori della funzione t differenti nella forma, che nascono da tutte le permutazioni tra le radici x', x'', x''', ec., e siccome le funzioni t ed y sono simili, saranno in egual numero i differenti valori di y, i quali rappresenteremo con i segni y', y'', y''', $\ldots$ $y^{(n)}$ in modo disposti, che la funzione y' comprenda le medesime radici e nel medesimo ordine, che contiene la funzione t', e le altre y'', y''', $\ldots$ $y^{(n)}$ corrispondano alle medesime permutazioni tra le radici x', x'', x''', ec., alle quali respettivamente corrispondono le funzioni t'', t''', $\ldots$ $t^{(n)}$. Così quando $t^{(r)}$ si cangerà

in $t^{(s)}$, nel medesimo tempo $y^{(r)}$ si muterà in $y^{(s)}$.

Ciò posto consideriamo la funzione

$$t'^{p}.y'+t''^{p}.y''+t'''^{p}.y''' \ldots . +t^{(n)p}.y^{(n)},$$

ove p è un numero intero qualunque, la quale avendo la proprietà di mantenersi invariabile, qualunque permutazione si faccia tra le radici x', x'', x''', $\ldots$ $x^{(m)}$, ed essendo perciò della forma $f.(x', x'', x''', \ldots, x^{(m)})$, potrà esprimersi razionalmente per i coefficienti della equazione proposta, di cui x', x'', x''', ec. sono le radici. Sia $H(p)$ il valore di questa funzione, e ponendo in essa successivamente $p=0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$ avremo le seguenti equazioni

$$\begin{aligned}
&y'+ \quad y''+ \quad y''' \ldots\ldots + \quad y^{(n)}=H\\
&t'\,y'+t''\,y''+t'''\,y''' \ldots\ldots +t^{(n)}.y^{(n)}=H(1)\\
&t'^{2}.y'+t''^{2}.y''+t'''^{2}.y''' \ldots\ldots +t^{(n)2}.y^{(n)}=H(2)\\
&\qquad\qquad\vdots\\
&t'^{n-1}.y'+t''^{n-1}.y''+t'''^{n-1}.y''' \ldots +t^{(n)n-1}.y^{(n)}=H(n-1)
\end{aligned}$$

ove le quantità H, $H(1)$, $H(2)$, ec. sono tutte cognite ed espresse per i coefficienti della proposta. Da quest'equazioni, che sono n di numero, si potrà con i soliti metodi di eliminazione trovare il valore delle n quantità y', y'', y''', $\ldots$ $y^{(n)}$, ed il problema sarà risoluto. Ma poichè i metodi ordinarj ci condurrebbero ad espressioni troppo complicate, e tali che comprenderebbero tutte le quantità t', t'', t''', ec., se vogliamo che il valore per esempio di $y^{(r)}$ sia espresso solamente per mezzo della corrispondente $t^{(r)}$, potremo usare il metodo seguente.

Moltiplichiamo tutte le precedenti equazioni, incominciando dall'ultima, respettivamente per le quantità
$1, L1, L2, L3 \ldots L(n-1)$, e sommandole poi insieme avremo

$$[t'^{n-1}+L_1 t'^{n-2}+L_2 t'^{n-3} \ldots . +L(n-2)t' +L(n-1)]y'$$
$$+[t''^{n-1}+L_1 t''^{n-2}+L_2 t''^{n-3} \ldots . +L(n-2)t'' +L(n-1)]y''$$
$$+[t'''^{n-1}+L_1 t'''^{n-2}+L_2 t'''^{n-3} \ldots . +L(n-2)t'''+L(n-1)]y'''$$
$$+\text{ec.}$$
$$=H(n-1)+L_1.H(n-2)+L_2.H(n-3) \ldots \ldots \ldots +L(n-1).H .$$

Ponghiamo

$$T_1=t^{n-1}+L_1 t^{n-2}+L_2 t^{n-3} \ldots \ldots \ldots +L(n-1) ,$$

e denotando con i segni T_1', T_1'', T_1''', ec. i valori particolari di T_1, quando t si cangia in t', t'', t''', ec., potremo porre l'equazione precedente sotto la forma

$$T_1'y'+T_1''y''+T_1'''y''' \ldots \ldots +T_1^{(n)}y^{(n)}$$
$$=H(n-1)+L_1.H(n-2)+L_2.H(n-3) \ldots . +L(n-1).H .$$

Adesso per trovare il valore di una qualunque delle incognite y', y'', y''', ec. per esempio di $y^{(r)}$, basterà porre eguali a zero i coefficienti di tutte le altre incognite, e si otterrà subito

$$y^{(r)}=\frac{H(n-1)+L_1.H(n-2)+L_2.H(n-3) \ldots +L(n-1).H}{T_1^{(r)}} ,$$

e l'equazioni $T_1'=0$, $T_1''=0$, ... $T_1^{(n)}=0$, eccettuata $T_1^{(r)}=0$ serviranno a determinare le $n-1$ quantità L_1, L_2, $L3$ .... $L(n-1)$.

Ma nè pure in questo caso convien ricorrere ai metodi ordinarj di eliminazione, poichè il valore delle quantità L_1, L_2, $L3$, ec. si otterrà facilmente mediante la seguente riflessione. L'equazioni $T_1'=0$, $T_1''=0$, ec. indicano che la quantità T_1 svanisce, allorchè vi si pone $t=t', t'', t''' \ldots t^{(n)}$ eccettuata $t^{(r)}$; dunque tutte queste quantità $t', t'', t''', \ldots t^{(n)}$ ad eccezione di $t^{(r)}$ sono radici della equazione $T_1=0$. Ma le medesime quantità, niuna eccettuata, sono radici della equazione $T=0$; quindi avremo $T_1(t-t^{(r)})=T$, e sostituendo i valori

$$t^n+(L_1-t^{(r)})t^{n-1}+(L_2-L_1 t^{(r)})t^{n-2}+\text{ec.}$$
$$=t^n+At^{n-1}+Bt^{n-2}+Ct^{n-3}+\text{ec.} ,$$

la qual' equazione dovendo essere identica ci darà $L_1=A+t^{(r)}$,

$L2=B+L1t^{(r)}$, $L3=C+L2t^{(r)}$, ec., cioè $L1=A+t^{(r)}$, $L2=B+At^{(r)}+t^{(r)^2}$, $L3=C+Bt^{(r)}+At^{(r)^2}+t^{(r)^3}$, ec.

Se nel numeratore del valore di $y^{(r)}$ sostituiamo quelli di $L1$, $L2$, ec., facilmente vedremo che questo numeratore è ciò, che diventa la quantità

$$H(n-1)+H(n-2)(t+A)+H(n-3)(t^2+At+B)$$
$$+H(n-4)(t^3+At^2+Bt+C)+\text{ec.}$$

allorchè vi si pone $t=t^{(r)}$. Dunque, se chiamiamo θ quella quantità, avremo in generale

$$y=\frac{\theta}{T1} ,$$

e da questa equazione ricaveremo il valore di tutte le quantità y' , y'' , y''' , ec. ponendovi successivamente $t=t'$, t'', t''', ec. Il valore di $T1$ si potrà ottenere più facilmente, se osserviamo che in generale $T1^{(r)}=\frac{T}{t-t^{(r)}}$ quando vi si mette $t=t^{(r)}$. Ma in tal caso divenendo zero tanto il numeratore che il denominatore della frazione $\frac{T}{t-t^{(r)}}$, è noto che il di lei valore è $=\frac{dT}{dt}$; dunque nella equazione $y=\frac{\theta}{T1}$ potremo porre $T1=\frac{dT}{dt}$.

6.

Col metodo precedente troveremo tutti i valori della funzione y espressi razionalmente per i corrispondenti valori della funzione t, eccettuati alcuni casi particolari. Perchè se delle funzioni t' , t'' , t''' , ec., le quali sono tutte differenti nella forma, alcune fossero eguali tra loro dipendentemente dai valori particolari delle radici x', x'', x''', ec., dalle quali sono composte, l'equazione $y=\frac{\theta}{T1}$ non ci darebbe i valori di y corrispondenti ai valori eguali di t. Infatti se l'equazione $T=0$ ha due radici eguali t' e t'', sarà per questi valori eguali $T1=\frac{dT}{dt}=nt^{n-1}+(n-1)At^{n-2}+(n-2)Bt^{n-3}+\text{ec.}=0$; e quindi dall'equazione $y=\frac{\theta}{T1}$ non potremo ricavare i valori di y'

ed y''. Converrà adunque ricorrere a qualche nuovo artifizio per conoscere questi valori.

Sia o la differenza tra t' e t'', cioè sia $t''=t'+o$, e siccome relativamente ad y' è

$$T1'=\left(\frac{T}{t-t'}\right)'=(t'-t'')(t'-t''')(t'-t^{IV})\ldots=-o(t'-t''')(t'-t^{IV})\ldots,$$

e relativamente ad y'' è

$$T1''=\left(\frac{T}{t-t''}\right)''=(t''-t')(t''-t''')(t''-t^{IV})\ldots=o(t''-t''')(t''-t^{IV})\ldots,$$

se facciamo $T2=(t-t''')(t-t^{IV})(t-t^{V})\ldots=\frac{T}{(t-t')(t-t'')}$, sarà

$y'=-\frac{\theta}{oT2}$, ed $y''=\frac{\theta}{oT2}$, se nel primo valore si pone $t=t'$, e nel secondo $t=t''=t'+o$. Quindi avremo pel teorema di *Taylor*

$$y''=\frac{1}{o}\left(\frac{\theta}{T2}+o\frac{d.\frac{\theta}{T2}}{dt}+\frac{o^2}{2}.\frac{d^2.\frac{\theta}{T2}}{dt^2}+\text{ec.}\right)$$

ponendo nel secondo membro $t=t'$. E sommando i valori di y' ed y'' otterremo in generale

$$y'+y''=\frac{d.\frac{\theta}{T2}}{dt}+\frac{o}{2}.\frac{d^2.\frac{\theta}{T2}}{dt^2}+\text{ec.}$$

Ma quando t' e t'' sono eguali, è $o=0$; dunque avremo in questo caso

$$y'+y''=\frac{d.\frac{\theta}{T2}}{dt},$$

ove $T2=\frac{T}{(t-t')^2}$, cioè conosceremo la somma dei due incogniti valori y' ed y''.

Ponghiamo $t''=t'+o$, $t'''=t'+ko$, $T3=\frac{T}{(t-t')(t-t'')(t-t''')}$, e facilmente vedremo essere

$$y'=\frac{1}{ko^2}.\frac{\theta}{T3}$$

$$y''=\frac{1}{(1-k)o^2}.\frac{\theta}{T3}$$

$$y'''=-\frac{1}{k(1-k)o^2}.\frac{\theta}{T3},$$

purchè facciamo nel primo valore $t=t'$, nel secondo $t=t'+\omega$, e nel terzo $t=t'+k\omega$. Quindi avremo

$$y'=\frac{1}{k\omega^2}\cdot\frac{\theta}{T3}$$

$$y''=\frac{1}{(1-k)\omega^2}\left(\frac{\theta}{T3}+\omega\frac{d.\frac{\theta}{T3}}{dt}+\frac{\omega^2}{2}.\frac{d^2.\frac{\theta}{T3}}{dt^2}+\frac{\omega^3}{2.3}.\frac{d^3.\frac{\theta}{T3}}{dt^3}+\text{ec.}\right)$$

$$y'''=-\frac{1}{k(1-k)\omega^2}\left(\frac{\theta}{T3}+k\omega\frac{d.\frac{\theta}{T3}}{dt}+\frac{k^2\omega^2}{2}.\frac{d^2.\frac{\theta}{T3}}{dt^2}+\text{ec.}\right)$$

ponendo da per tutto $t=t'$. Adunque sarà

$$y'+y''+y'''=\frac{d^2.\frac{\theta}{T3}}{2dt^2}+(1+k)\omega\frac{d^3.\frac{\theta}{T3}}{2.3dt^3}+\text{ec.}$$

e quando $\omega=0$, cioè quando le tre quantità t', t'', t''', sono eguali,

$$y'+y''+y'''=\frac{d^2.\frac{\theta}{T3}}{2dt^2}.$$

In generale, se p è il numero dei valori eguali a t', avremo

$$y'+y''+y'''\ldots+y^{(p)}=\frac{d^{p-1}.\frac{\theta}{T(p)}}{2.3\ldots(p-1)dt^{p-1}}$$

ponendo in questa quantità $t=t'$. Il valore di $T(p)$ sarà $=\frac{T}{(t-t')^p}$, e siccome facendo $t=t'$ svanisce in questa frazione il numeratore ed il denominatore, differenziando più volte ne troveremo il valore $=\frac{d^pT}{2.3\ldots pdt^p}$. Avremo in tal modo espressa per t' e per i coefficienti della proposta la somma delle quantità y', y'', y''', $\ldots y^{(p)}$, e se rinnuoveremo il calcolo prendendo y^2 in luogo di y otterremo in simil guisa la somma dei quadrati delle medesime quantità y', y'', ec., e così pure la somma dei cubi, ec. Trovate le somme delle potenze di queste quantità avremo facilmente per mezzo delle note formole i coef-

ficienti della equazione, che ha le stesse quantità per radici. Da ciò si conclude che, se alcune delle funzioni t', t'', ec. sono eguali dipendentemente dai valori particolari delle radici x', x'', x''', ec., in tal caso non possono aversi le funzioni corrispondenti y', y'', ec. espresse razionalmente per t', ma può sempre ottenersi l'equazione, di cui queste quantità y', y'', y''', ec. sono radici, ed i coefficienti di questa equazione sono funzioni razionali di t'.

7.

Fin quì abbiamo supposto, che le funzioni t ed y fossero simili; ponghiamo adesso che siano dissimili. Sia n il numero dei valori differenti nella forma, che ha la funzione t, ed n' il numero dei valori differenti della funzione y. Abbiamo veduto che ciascuno di questi numeri n ed n' dev'essere eguale ad $1.2.3...m$, ove m è il grado della proposta, o un submultiplo di questo numero $1.2.3...m$. Inoltre, siccome le funzioni t ed y sono dissimili, i numeri n ed n' saranno tra loro differenti. Ciò posto sia primieramente n un multiplo di n', cioè $n=cn'$; scrivendo tutti i valori diversi della funzione t ed i corrispondenti della funzione y, i quali saranno c volte ripetuti, potremo col metodo istesso usato per le funzioni simili determinare ciascun valore della y pel corrispondente valore della t.

Sia per esempio $t=f.(x', x'')$, ed $y=F.(x', x'', x''')$; a ciascun valore diverso della t corrisponderanno tre valori eguali della y, e scrivendoli per ordine avremo

$$t', t'', t''', t^{IV}, t^{V}, t^{VI}, t^{VII}, \text{ ec.}$$
$$y', y', y', y'', y'', y'', y''', \text{ ec.}$$

onde potremo determinare la y' per la t', o per la t'', o per la t''', e così degli altri valori della y, i quali saranno espressi razionalmente per uno dei corrispondenti valori della t.

8.

Sia in secondo luogo n' un multiplo di n, cioè $n'=cn$; scrivendo tutti i valori diversi della y ed i corrispondenti della t troveremo che a ciascun valore della t corrispondono c diversi valori della y. Potremo anche a questo caso applicare la soluzione del num. 5., purchè consideriamo tutti questi c valori eguali a ciascuno della t, cioè purchè invece della trasforma-

ta più semplice $T=0$ prendiamo $T^c=0$; ma siccome ciascuna radice di questa equazione ne ha altre $c-1$ eguali, bisognerà modificare la soluzione con le regole date (6) per le radici eguali, ed invece di ottenere il valore di ciascuna y non troveremo che la somma di tutte le y, le quali corrispondono ad un medesimo valore della t. Onde apparisce, che in questo caso il valore di ciascuna y non potrà esser dato che per mezzo di una equazione del grado c, la quale comprenderà tutti i valori di y corrispondenti ad un medesimo valore di t.

Sia per esempio $t=f.(x', x'', x''')$, $y=F.(x', x'')$; scrivendo per ordine i valori diversi della y ed i corrispondenti della t avremo

$$t', \; t', \; t', \; t'', \; t'', \; t'', \; t''', \text{ ec.}$$
$$y', \; y'', \; y''', \; y^{IV}, \; y^{V}, \; y^{VI}, \; y^{VII}, \text{ ec.}$$

onde a ciascun valore della t corrispondono tre differenti valori della y. Dovremo perciò considerare la trasformata $T^3=0$, e troveremo i valori della y espressi a tre a tre per mezzo di equazioni del terzo grado.

9.

Si può ancora ridurre la soluzione di questo secondo caso a quella delle funzioni simili. Siano infatti $y', y'', y''', \ldots . y^{(c)}$ i c valori della y corrispondenti a t', la funzione $f.(y', y'', y''', \ldots, y^{(c)})$ sarà simile a t', perchè si manterrà costante o si cangerà per tutte quelle permutazioni tra le radici x', x'', x''', ec., per le quali t' conserva la medesima forma o la muta. Quindi ponendo in luogo di y una funzione della forma $f.(y', y'', y''', \ldots, y^{(c)})$ potremo determinare i valori di essa per i corrispondenti della t col metodo del num. 5., ed in questa ricerca adopreremo la trasformata più semplice $T=0$, che ha per radici i soli valori differenti della funzione t. Così conosceremo tutti i coefficienti di quella equazione, che ha per radici i valori $y', y'', y''', \ldots y^{(c)}$, perchè ciascuno di questi coefficienti è necessariamente della forma $f.(y', y'', y''', \ldots, y^{(c)})$. I medesimi coefficienti saranno in generale determinabili razionalmente per quelli della proposta e per un valore t' della t.

Ma se questa t' in grazia delle particolari relazioni tra le radici x', x'', x''', ec. avesse altri valori eguali, i coefficienti medesimi dipenderebbero allora (6) da una equazione del secondo grado, del terzo, ec.

10.

Parrebbe a prima vista, che il metodo stesso del paragrafo antecedente applicar si potesse al caso del num. 6., in cui le due funzioni t' e t'' sono eguali per i particolari valori delle radici x', x'', x''', ec. Ma con un poco di riflessione ci persuaderemo, che s'ingannerebbe chi pensasse in tal guisa. Poichè il valore di $y'+y''$ ci verrebbe dato da una frazione, la quale avrebbe per denominatore la medesima quantità T_1, che svanisce nel caso di $t=t'$; onde ci troveremmo soggetti al medesimo inconveniente. Potrebbe questo invero evitarsi, se in luogo della trasformata $T=0$ prendessimo quella equazione che ha per radici le diverse funzioni $t'+t''$, $t'+t'''$, $t''+t'''$, ec., ove la $t'+t''$ corrispondente ad $y'+y''$ non ha altri valori eguali. Ma bisognerebbe sottoporsi al lungo calcolo, che esige la ricerca di questa nuova trasformata, e ripetere tutte le altre operazioni, dalle quali dipende il valore di $y'+y''$. Il metodo del num. 6. è incomparabilmente più semplice, perchè non obbliga a nuovi calcoli, ma profitta di quelli già fatti; e ci mostra quanto vantaggio apporti l'applicazione del Calcolo Differenziale alla teoria dell'equazioni. Senza che io l'avverta, si vede che simili riflessioni possono farsi relativamente ai casi, nei quali un maggior numero delle funzioni t', t'', t''', ec. si trovano eguali in vigore delle particolari relazioni tra le radici x', x'', x''', ec.

11.

Ponghiamo finalmente, che niuno dei due casi precedenti abbia luogo, cioè che non sia n un multiplo di n', nè n' un multiplo di n. In questo terzo caso si scrivano tutti i valori di t, ammessi anche quelli, nei quali la t non varia, ed i corrispondenti della y; poi dei valori eguali della t si ritengano quei soli, ai quali corrispondono differenti valori della y, e si rigettino quelli, per i quali tanto la t che la y si mantengono costanti. Avremo così ridotto questo caso al secondo, perchè a

ciascun valore della t corrisponderà un dato numero di valori diversi della y.

Sia per esempio t della forma $f.(x', x'')(x''', x^{IV})$, y della forma $F.(x'+x''+x''')$, ed il grado della proposta $=4$; sarà $n=6$, $n'=4$, cioè nè n un multiplo di n', nè n' un multiplo di n. Siccome la funzione $t'=f.(x', x'')(x''', x^{IV})$ non varia quando x' si cangia in x'', o quando x''' si cangia in x^{IV}, avrà la t' quattro valori eguali, che saranno i seguenti;

$f.(x', x'')(x''', x^{IV})$, $f.(x'', x')(x''', x^{IV})$, $f.(x', x'')(x^{IV}, x''')$, $f.(x'', x')(x^{IV}, x''')$.

A questi corrispondono i quattro valori della y

$F.(x'+x''+x''')$, $F.(x''+x'+x''')$, $F.(x'+x''+x^{IV})$, $F.(x''+x'+x^{IV})$, i quali sono eguali a due a due. Dunque non ammetteremo che due valori eguali della t', ai quali corrisponderanno due valori differenti della y. Ripetendo il medesimo discorso per gli altri valori della t vedremo che a ciascuno dei valori differenti della t corrispondono due diversi valori della y: onde potremo adoprare i metodi del secondo caso, ponendo $c=2$.

Viceversa se sarà t della forma $F.(x'+x''+x''')$, ed y della forma $f.(x', x'')(x''', x^{IV})$, la funzione $t'=F.(x'+x''+x''')$ avrà i sei valori eguali seguenti

$F.(x'+x''+x''')$, $F.(x''+x'+x''')$, $F.(x'''+x''+x')$, $F.(x'+x'''+x'')$, $F.(x''+x'''+x')$, $F.(x'''+x'+x'')$,

ai quali corrisponderanno i sei valori della y

$f.(x', x'')(x''', x^{IV})$, $f.(x'', x')(x''', x^{IV})$, $f.(x''', x'')(x', x^{IV})$, $f.(x', x''')(x'', x^{IV})$, $f.(x'', x''')(x', x^{IV})$, $f.(x''', x')(x'', x^{IV})$

che sono eguali a due a due. Dunque a ciascuno dei valori differenti della t corrispondono tre valori diversi della y, e perciò nell'applicare a queste esempio i metodi del caso secondo dobbiamo porre $c=3$.

12.

Dalle cose precedenti si può concludere, che chiamate t ed y due funzioni qualunque delle radici x', x'', x''', ec. di una equazione proposta, se queste funzioni sono tali, che tutte le permutazioni tra le radici x', x'', x''', ec., le quali fanno variare la funzione y, facciano nel medesimo tempo variare la funzione t, potremo avere il valore di y espresso razionalmente per t e per i coefficienti della proposta, in guisa che conoscen-

do un valore di t conosceremo subito il valore corrispondente di y. Ciò è vero in generale; poichè se in grazia delle particolari relazioni tra le radici x', x'', x''', ec. il valor cognito della t ne avesse altri eguali, allora il valore corrispondente della y dipenderebbe da una equazione di tanto grado, quanti sono i valori eguali della t, ed i coefficienti di questa equazione sarebbero funzioni razionali di t.

Ma se la funzione t conserva il medesimo valore per alcune permutazioni, le quali fanno variare la funzione y, non si potrà trovare il valore di y in t che per mezzo di una equazione del secondo grado, se al medesimo valore di t corrispondono due valori differenti di y, o del terzo grado se ad un valore di t corrisponderanno tre valori diversi della y, e così in seguito. I coefficienti di quest' equazioni saranno in generale funzioni razionali di t; in modo che conosciuto un valore di t avremo i corrispondenti valori di y per la semplice risoluzione di una equazione del secondo, del terzo grado, ec. Se però il valore dato della t ne avrà altri eguali dipendentemente dai particolari rapporti tra le radici x', x'', x''', ec., in tal caso anche questi coefficienti dipenderanno da una equazione del secondo grado, del terzo, ec.

13.

Il modo, con cui (5) abbiamo disposte le serie t', t'', t''', t^{IV}, t^{V}, ec.; y', y'', y''', y^{IV}, ec. è quello, che conduce alla più semplice soluzione del problema. Ma stando ferma la prima serie potremmo prendere per primo termine y' della seconda qualunque altro valore della funzione y, purchè gli altri si disponessero in ordine tale, che tutti successivamente nascessero dal primo per quelle permutazioni, per le quali nella prima serie dal termine t' nascono gli altri t'', t''', t^{IV}, ec. La nuova funzione

$$t'^{p}y' + t''^{p}y'' + t'''^{p}y''' \ldots\ldots + t^{(n)p}y^{(n)},$$

che nascerebbe da questo sistema, sarebbe anch'essa invariabile per qualunque permutazione tra le radici x', x'', x''', ec., ed otterremmo egualmente ciascun valore della y espresso per quello della t, che nella nuova disposizione gli corrisponde. Così per esempio, se y è della forma $F.(x')(x'')$, invece di disporre i valori della y nell'ordine

$F.(x')(x'')$, $F.(x'')(x')$, $F.(x''')(x'')$, $F.(x')(x''')$, $F.(x'')(x''')$, $F(x''')(x')$, ec.

il quale ponghiamo esser coerente al modo da noi adottato nel num. 5., potremo prendere per primo termine un altro valore $F.(x'')(x')$, ed otterremo la serie

$F.(x'')(x')$, $F.(x')(x'')$, $F.(x'')(x''')$, $F.(x''')(x')$, $F.(x''')(x'')$, $F.(x')(x''')$, ec.

Nel primo caso avremo espressa per t' la funzione $F.(x')(x'')$, nel secondo la funzione $F.(x'')(x')$. Così prendendo per primo termine uno dopo l'altro tutti i valori della y, potremo determinare ciascuno di essi per un solo valore t' della funzione t.

Ma allontanandoci dal primo sistema incontreremo spesso l'inconveniente, che i valori di y siano determinati per mezzo di equazioni di un grado più elevato, lo che si renderà sensibile con alcuni esempj. Sia $t'=f.(x')(x'')(x''')\ldots(x^{(p)})$, la qual funzione cangia di valore a tutte le permutazioni tra le radici x', x'', x''', $\ldots x^{(p)}$, ed y sia una funzione rappresentata da $F.(x')(x'')(x''')\ldots(x^{(q)})$, ove q è $=$ o $<p$. Ponendo secondo il primo sistema $y'=F.(x')(x'')(x''')\ldots(x^{(q)})$ troveremo (7) tutti i valori della y espressi razionalmente per i corrispondenti della t. Lo stesso accaderà, se faremo y' eguale ad un altro valore della y, purchè questo non contenga che le radici x', x'', x''', $\ldots x^{(p)}$, le quali sono comprese in t', per esempio $y'=F.(x''')(x')(x'')\ldots(x^{(q)})$; perchè le medesime permutazioni, che fanno variare la funzione y', faranno insieme variare la funzione t', e quindi a ciascun valore della t corrisponderà un solo valore della y. Ma se prendiamo per primo termine y' un valore della y, il quale contenga una o più radici diverse da quelle comprese nella t', allora i valori della y non saranno determinabili razionalmente per quei della t, ma dipenderanno da equazioni di grado più o meno elevato secondo il numero delle radici diverse, il numero p, ed il grado m della proposta. Facciamo per esempio $y'=F.(x^{p+1})(x'')(x''')\ldots(x^{(q)})$, ove una sola radice $x^{(p+1)}$ è diversa da quelle contenute nella t'; è chiaro che la y' si cangerà di valore, se in luogo di $x^{(p+1)}$ por-

remo le altre radici $x^{(p+2)}$, $x^{(p+3)}$, ... $x^{(m)}$, e che per le medesime permutazioni la t' conserverà il suo valore. Dunque al solo valore t' della t corrisponderanno $m-p$ valori diversi della y, e perciò la y' non potrà determinarsi per la t', che per mezzo di una equazione del grado $m-p$. Così se prendiamo $y'=F.(x^{(p+1)})(x^{(p+2)})(x''')\ldots(x^{(q)})$ in modo che siano due le radici diverse da quella della t', cioè $x^{(p+1)}$, ed $x^{(p+2)}$; se queste si varieranno tra loro, o se in luogo di una di esse porremo le altre radici $x^{(p+3)}$, $x^{(p+4)}$, ... $x^{(m)}$, la y' si cangerà mantenendosi la medesima la t'; onde la y' dipenderà da una equazione del grado $2(m-p-1)$. In generale se r è il numero delle radici contenute nella y' diverse da quelle comprese nella t', la y' sarà determinata per la t' mediante una equazione del grado $r(m-p-r+1)$.

Ponghiamo adesso $t'=f.(x', x'')(x''')(x^{IV})\ldots(x^{(p)})$, la qual funzione cangia di valore a tutte le permutazioni delle radici $x', x'', x''', \ldots x^{(p)}$ eccettuata quella di x' in x'', ed y sia una funzione rappresentata dalla forma $F.(x', x'')(x''')(x^{IV})\ldots(x^{(q)})$, essendo come sopra $q=0<p$. In questo caso, perchè i valori di y siano espressi razionalmente per quei di t, bisogna non solo prendere per primo termine y' una funzione, che non contenga radici diverse da quelle della t', ma di più conviene che in essa le radici x', x'' permutandosi tra loro, ma non mai con le altre radici x''', x^{IV}, ec. rimangano nei primi due posti. Infatti se facciamo $y'=F.(x', x''')(x'')(x^{IV})\ldots(x^{(q)})$, questa funzione cangerà valore quando si muta x' con x'', per la qual permutazione la t' conserva il suo valore; e quindi la y' non potrà determinarsi per la t', che per mezzo di una equazione del secondo grado.

Simili riflessioni potranno applicarsi alle altre forme, e da esse risulterà, che in generale il primo sistema da noi adottato nella disposizione dei valori della y è quello, da cui nasce la più semplice soluzione del problema. I medesimi principj c'indicheranno, in quali circostanze possiamo da quel sistema allontanarci senza inconveniente, o ancora con vantaggio. Per

mostrare con un esempio, che anche quest'ultimo caso può accadere, ponghiamo $t'=f.(x', x'', x''', \ldots, x^{m-1})$, ed y della forma $F.(x')$. Se facciamo il primo termine $y'=F.(x')$, dovremo determinare ciascun valore della y pel corrispondente della t mediante una equazione del grado $m-1$; e lo stesso accaderà se per primo termine prenderemo qualunque altro valore della y, il quale contenga una delle radici comprese nella t'. Ma se ponghiamo $y'=F.(x^{(m)})$, è facile il vedere che questa funzione si manterrà costante per tutte quelle permutazioni, le quali non fanno variare la funzione t'; onde in questa disposizione dei valori della y otterremo ciascuno di essi espresso razionalmente pel corrispondente valore della t. Possiamo spiegare questa singolarità coll'osservare che $x'+x''+x''' \ldots +x^{(m)}=a$, chiamando $-a$ il coefficiente del secondo termine della proposta; poichè sostituendo il valore di $x^{(m)}$ abbiamo

$y'=F.(x^{(m)})=F.(a-x'-x''-x''' \ldots -x^{(m-1)})$, cioè della forma $\phi.(x', x'', x''', \ldots, x^{(m-1)})$, e quindi la funzione y' essendo simile alla funzione t' è (5) determinabile razionalmente per questa.

14.

Il problema risoluto nei numeri antecedenti comprende come caso particolare quello, da cui dipende la risoluzione dell'equazioni, il quale consiste nel dedurre il valore delle radici x', x'', x''', ec. dal valore di una funzione qualunque delle medesime radici. Chiamata t questa funzione, se porremo x in luogo di y, i metodi precedenti c'insegneranno a trovare i valori di x per mezzo dei corrispondenti valori della t. Rimane a scegliere per t una funzione tale, che la trasformata di cui essa è radice, sia di un grado meno elevato di quello della proposta, o almeno presenti solo per la sua risoluzione le difficoltà dei gradi inferiori. Di più conviene che l'equazioni, per mezzo delle quali dalla funzione t si determinano le radici, siano anch'esse di un grado minore di quello della proposta. Passiamo a vedere come in grazia dei principj stabiliti si possa direttamente ottenere la risoluzione dell'equazioni del secondo, terzo, e quarto grado.

Digitized by Google

15.

Incominciando dalla equazione di secondo grado $x^2+ax+b=0$ cerchiamo il valore di una funzione delle radici x', x'', dalla quale ricavar si possa quello delle radici medesime: Chiamiamo $f.(x')(x'')$ questa funzione, e siccome essa ha due diversi valori $f.(x')(x'')$ e $f(x'')(x')$, condurrà necessariamente ad una equazione del secondo grado. Conviene eccettuare il caso, in cui la funzione $f.(x')(x'')$ non cangi valore alla permutazione di x' in x'', cioè abbia la forma $f.(x', x'')$, perchè allora essa dipenderebbe da una equazione del primo grado. Ma in tal caso corrispondendo a questo unico valore di $f.(x', x'')$ le due diverse radici x' ed x'', non potrà ciascuna di esse determinarsi, che per mezzo di una equazione del secondo grado, che sarà la proposta medesima. Siccome adunque la funzione cercata, perchè possa condurre alla risoluzione della proposta, deve necessariamente dipendere da una equazione del secondo grado, procuriamo almeno che essa sia mancante del secondo termine, acciò possa risolversi mediante la sola estrazione di una radice quadrata. Per ottener ciò converrà che la sòmma delle due funzioni $f.(x')(x'')$ e $f.(x'')(x')$ sia zero, cioè che esse siano eguali e di segno contrario; alla qual condizione si può soddisfare in infinite maniere. Ma per trovare una funzione soddisfaciente della forma la più semplice ponghiamo $f.(x')(x'')=Px'+Qx''$, ove P e Q sono quantità indipendenti dalle radici x', x''; avremo $f(x'')(x')=Px''+Qx'$, e poichè dev'essere $Px'+Qx''=-Px''-Qx'$, ne ricaveremo $Q=-P$, e P potendo esser qualunque per più semplicità la faremo $=1$. Sarà dunque $x'-x''$ la funzione richiesta, e moltiplicando insieme i due fattori $t-x'+x''$, $t-x''+x'$ avremo la trasformata $t^2+2x'x''-x'^2-x''^2=0$, la quale a motivo di $2x'x''-x'^2-x''^2=-(x'+x'')^2+4x'x''=-a^2+4b$ diventerà $t^2-a^2+4b=0$. Essa ci darà le due radici $t'=\sqrt{(a^2-4b)}$, $t''=-\sqrt{(a^2-4b)}$, e per queste col metodo del num. 5. esprimeremo razionalmente le radici x', x'' della proposta. Ma più facilmente potremo ciò conseguire mediante l'equazioni $x'+x''=-a$, $t'=x'-x''=\sqrt{(a^2-4b)}$, dalle quali subito ricaveremo $x'=\frac{-a+\sqrt{(a^2-4b)}}{2}$, $x''=\frac{-a-\sqrt{(a^2-4b)}}{2}$.

16.

Sia data l'equazione del terzo grado

$$x^3+bx+c=0,$$

che per più semplicità supponghiamo priva del secondo termine, e cerchiamo una funzione delle sue radici, dalla quale ottener si possa il valore delle medesime radici. Prendiamo la più semplice forma $Px'+Qx''+Rx'''$, ed eseguendo tutte le possibili permutazioni tra le radici x', x''; x''' troveremo i sei valori

1.° $Px'+Qx''+Rx'''$	2.° $Px''+Qx'+Rx'''$
3.° $Px'''+Qx''+Rx'$	4.° $Px'+Qx'''+Rx''$
5.° $Px''+Qx'''+Rx'$	6.° $Px'''+Qx'+Rx''$

e la trasformata, di cui è radice la funzione assunta, sarà del sesto grado. Per poterne fare uso vediamo se è possibile che sia risolubile a guisa di quelle del secondo, cioè che abbia la forma

$$t^6-At^3+B=0.$$

In tal caso chiamate h^3, k^3 le radici della equazione $z^2-Az+B=0$, in modo che sia $h^3=\frac{A+\sqrt{(A^2-4B)}}{2}$, $k^3=\frac{A-\sqrt{(A^2-4B)}}{2}$, la trasformata prenderà la forma $(t^3-h^3)(t^3-k^3)=0$, e le di lei radici saranno h, αh, βh, k, αk, βk, ove 1, α, β sono le tre radici cubiche dell'unità. Si osservi, che 1, α, e β essendo radici della equazione $r^3-1=0$, avremo il loro prodotto $\alpha\beta=1=\alpha^3$, e perciò $\beta=\alpha^2$; di più $1+\alpha+\alpha^2=0$, perchè nella equazione $r^3-1=0$ manca il secondo termine.

Conviene adesso determinare le quantità P, Q ed R, perchè le precedenti funzioni abbiano tra loro quelle relazioni, che sussistono tra le quantità h, αh, $\alpha^2 h$, ec. Ora se facciamo il valore $Px'+Qx''+Rx'''=h$, dovrà un altro valore essere $=\alpha h$, ma per questo non può prendersi indifferentemente qualunque altro, perchè se si prendesse il secondo, sarebbe $Px''+Qx'+Rx'''=\alpha(Px'+Qx''+Rx''')$, cioè $Q=\alpha P$, $P=\alpha Q$, $R=\alpha R$, le quali equazioni dandoci $\alpha=1$ non possono sussistere, giacchè α è diversa dall'unità. Lo stesso accaderebbe, se facessimo αh eguale al terzo e al quarto valore: ma se lo pon-

ghiamo eguale al quinto, avremo
$Px''+Qx'''+Rx'=a(Px'+Qx''+Rx''')$, cioè $R=aP, Q=aR=a^2P$, $P=aQ=a^3P$, e quindi $a^3=1$, com'esser deve. Sostituendo nelle funzioni i valori trovati di Q ed R, e facendo per più semplicità $P=1$, vedremo essere

1.° $x'+a^2x''+ax'''=h$ 2.° $x''+a^2x'+ax'''$
3.° $x'''+a^2x''+ax'$ 4.° $x'+a^2x'''+ax''$
5.° $x''+a^2x'''+ax'=ah$ 6.° $x'''+a^2x'+ax''=a^2h$.

Gli altri tre valori 2.° , 3.° , e 4.° rappresenteranno le radici k , ak , a^2k in tre diverse combinazioni, che sono le seguenti;

(a) 2.°$=k$ 4.°$=ak$ 3.°$=a^2k$
(b) 3.°$=k$ 2.°$=ak$ 4.°$=a^2k$
(c) 4.°$=k$ 3.°$=ak$ 2.°$=a^2k$

Nel primo modo sarà $k=x''+a^2x'+ax'''$, nel secondo $k=x'''+a^2x''+ax'$, nel terzo $k=x'+a^2x'''+ax''$, i quali valori sono tutti diversi, ma i loro cubi sono li stessi per le relazioni, che regnano tra loro.

Per calcolare la trasformata abbiamo $A=h^3+k^3$, $B=h^3k^3$; e siccome in questi valori non entra che il cubo di k, essi saranno i medesimi, qualunque si usi delle tre antecedenti maniere, e la stessa perciò la trasformata. Sarà dunque
$A=(x'+a^2x''+ax''')^3+(x''+a^2x'+ax''')^3$,
$B=(x'+a^2x''+ax''')^3(x''+a^2x'+ax''')^3$, svolgendo i quali valori, che sono funzioni invariabili delle radici della proposta, e ricordandoci che $a^3=1$, ed $a+a^2=-1$, troveremo con le solite regole $A=-27c$, $B=-27b^3$. Sostituendo questi valori avremo

$$h^3=27\left[-\frac{c}{2}+\sqrt{\left(\frac{c^2}{4}+\frac{b^3}{27}\right)}\right], \quad k^3=27\left[-\frac{c}{2}-\sqrt{\left(\frac{c^2}{4}+\frac{b^3}{27}\right)}\right],$$

e quindi due radici della trasformata sono

$$h=3\sqrt[3]{\left[-\frac{c}{2}+\sqrt{\left(\frac{c^2}{4}+\frac{b^3}{27}\right)}\right]}, \quad k=3\sqrt[3]{\left[-\frac{c}{2}-\sqrt{\left(\frac{c^2}{4}+\frac{b^3}{27}\right)}\right]},$$

e le altre quattro ah, a^2h, ak, a^2k, e per mezzo di queste, che sono tutte differenti, potremo razionalmente esprimere le radici della proposta. Ma ciò più facilmente conseguiremo mediante l'equazioni

$$x'+a^2x''+ax'''=h$$
$$x''+a^2x'+ax'''=k$$
$$x'+x''+x'''=0$$

dalle quali si deduce

$$x'=\frac{h+ak}{3},\ x''=\frac{ah+k}{3},\ x'''=\frac{a^2(h+k)}{3}.$$

Questi valori delle radici dipendono dalla combinazione (*a*); per aver quelli che corrispondono alla combinazione (*b*), convien fare eguale a k la funzione $x'''+a^2x''+ax'$, cioè determinare le radici per mezzo dell'equazioni

$$x'+a^2x''+ax'''=h$$
$$x'''+a^2x''+ax'=k$$
$$x'+x''+x'''=0$$

le quali ci daranno

$$x'=\frac{h+a^2k}{3},\ x''=\frac{a(h+k)}{3},\ x'''=\frac{k+a^2h}{3}.$$

Se finalmente ci prevarremo dell'equazioni

$$x'+a^2x''+ax'''=h$$
$$x'+a^2x'''+ax''=k$$
$$x'+x''+x'''=0$$

prendendo per k la funzione $x'+a^2x'''+ax''$, che corrisponde alla terza combinazione (*c*), otterremo

$$x'=\frac{h+k}{3},\ x''=\frac{ah+a^2k}{3},\ x'''=\frac{ak+a^2h}{3}.$$

Invece di porre h eguale al 1.° valore della funzione potremmo prenderla eguale al 5.° o al 6.° valore, come abbiamo fatto relativamente alla k; ma facilmente ci assicureremo, che queste nuove combinazioni non porteranno sistemi di radici diversi dai tre antecedenti. Infatti si scorge a colpo d'occhio, che per esempio l'equazioni

$$x''+a^2x'''+ax'=h$$
$$x''+a^2x'+ax'''=k$$
$$x'+x''+x'''=0$$

ci daranno per x'', x''', x' quei medesimi valori, che nel terzo sistema abbiamo respettivamente ottenuti per x', x'', x'''.

Abbiamo adunque tre differenti sistemi di radici, e siamo in dubbio quale di essi rappresenti le radici della proposta. Tale incertezza nasce dal trovarsi nella trasformata $t^6-27ct^3-27b^3=0$ il solo cubo b^3 del coefficiente b della proposta, il qual cubo si mantiene lo stesso, se in luogo di b si pone ab ed a^2b; in modo che la medesima trasformata appartiene egualmente alle tre equazioni

$$(A)\qquad \begin{matrix} x^3+bx+c=0 \\ x^3+abx+c=0 \\ x^3+a^2bx+c=0 \end{matrix}$$

ed egualmente serve alla ricerca delle loro radici. Onde non deve far maraviglia, se questa trasformata ci ha dato tre diversi sistemi, i quali rappresentano le radici di tre diverse equazioni.

Per venire in chiaro, da quale di questi sistemi siano espresse le radici della proposta, consideriamo la funzione $x'x''+x'x'''+x''x'''$, la quale sappiamo dover'essere eguale al coefficiente b della x nella proposta. Ora questa funzione $x'x''+x'x'''+x''x'''$ si trova nel primo sistema $=-\frac{ahk}{3}$, nel secondo $=-\frac{a^2hk}{3}$, nel terzo $=-\frac{hk}{3}$, e l'equazioni

$$h=3\sqrt[3]{\left[-\frac{c}{2}+\sqrt{\left(\frac{c^2}{4}+\frac{b^3}{27}\right)}\right]},\ k=3\sqrt[3]{\left[-\frac{c}{2}-\sqrt{\left(\frac{c^2}{4}+\frac{b^3}{27}\right)}\right]}$$

ci danno $\frac{hk}{3}=-b$. Dunque il terzo sistema è quello che presenta le radici della proposta.

Se si moltiplicano tra loro le tre equazioni (A), ne nascerà l'equazione razionale del nono grado

$$x^9+3cx^6+(3c^2+b^3)x^3+c^3=0,$$

ed i tre sistemi trovati ci danno tutte le nove radici di essa. A questa medesima equazione si giungerebbe, se si volessero eliminare i radicali dalla equazione

$$x=\sqrt[3]{\left[-\frac{c}{2}+\sqrt{\left(\frac{c^2}{4}+\frac{b^3}{27}\right)}\right]}+\sqrt[3]{\left[-\frac{c}{2}-\sqrt{\left(\frac{c^2}{4}+\frac{b^3}{27}\right)}\right]}.$$

17.

Passiamo all'equazione del quarto grado

$$x^4+ax^2+bx+c=0,$$

dalla quale è stato tolto il secondo termine, e procuriamo di trovare una funzione delle radici, che al solito supporremo della forma più semplice $Px'+Qx''+Rx'''+Sx^{IV}$, la quale dipenda da una equazione meno elevata, o più facile a risolversi che la proposta. Questa funzione presa nella sua generalità dipende da una equazione del ventiquattresimo grado; ma se la rendiamo più particolare facendo $P=Q$, il grado della trasformata scemando della metà si ridurrà $=12$, e diverrà $=6$ se faremo ancora $R=S$. In questo caso i sei valori diversi della funzione saranno

$P(x'+x'')+R(x'''+x^{IV})$, $P(x'''+x^{IV})+R(x'+x'')$,
$P(x'+x''')+R(x''+x^{IV})$, $P(x''+x^{IV})+R(x'+x''')$,
$P(x'+x^{IV})+R(x''+x''')$, $P(x''+x''')+R(x'+x^{IV})$,

e se volessimo diminuirne il numero, li renderemmo tutti identici; onde la funzione diverrebbe allora inutile per la ricerca delle radici della proposta, poichè ad un solo valore della funzione corrispondendo tutte le quattro radici x', x'', x''', x^{IV}, non potrebbero (8) queste determinarsi che per mezzo di una equazione del quarto grado, che sarebbe la proposta medesima.

Siccome adunque la trasformata dev'essere necessariamente del sesto grado, procuriamo almeno che essa presenti solamente le difficoltà dei gradi inferiori al quarto, cioè che sia derivativa del secondo o del terzo. E poichè dalla forma della funzione chiaramente apparisce, che non può conseguirsi l'intento nella prima maniera, vediamo se sia possibile di ottenerlo nella seconda, cioè se possa ridursi la trasformata ad esser derivativa del terzo grado, o sia della forma

$$z^6+Az^4+Bz^2+C=0.$$

Ora se chiamiamo z', z'', z''' tre radici di questa equazione, le altre tre saranno $-z'$, $-z''$, $-z'''$; dunque converrà fare in modo, che i sei valori della funzione soddisfacciano a questa condizione. Ciò facilmente conseguiremo ponendo $R=-P$, perchè quei valori diventeranno

$P(x'+x''-x'''-x^{IV})$, $P(x'''+x^{IV}-x'-x'')$,
$P(x'+x'''-x''-x^{IV})$, $P(x''+x^{IV}-x'-x''')$,
$P(x'+x^{IV}-x''-x''')$, $P(x''+x'''-x'-x^{IV})$,

ed a tre di essi corrisponderanno altri tre eguali e di segno contrario. La quantità P potrà esser qualunque, ma per più semplicità la porremo eguale all'unità.

Facciamo nella trasformata $z^2=t$, ed otterremo l'equazione del terzo grado

$$t^3+At^2+Bt+C=0,$$

di cui le radici saranno $(x'+x''-x'''-x^{IV})^2$, $(x'+x'''-x''-x^{IV})^2$, $(x'+x^{IV}-x''-x''')^2$. Se moltiplichiamo tra loro i tre fattori $t-(x'+x''-x'''-x^{IV})^2$, $t-(x'+x'''-x''-x^{IV})^2$, $t-(x'+x^{IV}-x''-x''')^2$, e ne paragoniamo il prodotto con l'equazione in t, ne ricaveremo i coefficienti di essa espressi per mezzo di funzioni invariabili delle radici della proposta, e perciò calcolabili con le solite regole. Eseguito questo calcolo si troverà $A=8a$,

$B=16a^2-64c$, $C=-64b^2$, e la trasformata in t sarà

$$t^3+8at^2+16(a^2-4c)t-64b^2=0.$$

Siano t', t'', t''' le tre radici di questa equazione, e senza ricorrere al metodo generale si esprimeranno per esse le radici della proposta nel modo seguente. L'equazioni

$$(x'+x''-x'''-x^{IV})^2=t'$$
$$(x'+x'''-x''-x^{IV})^2=t''$$
$$(x'+x^{IV}-x''-x''')^2=t'''$$

mediante l'estrazione della radice quadrata ci daranno

$$x'+x''-x'''-x^{IV}=\pm\sqrt{t'}$$
$$x'+x'''-x''-x^{IV}=\pm\sqrt{t''}$$
$$x'+x^{IV}-x''-x'''=\pm\sqrt{t'''}.$$

Aggiungiamo a queste l'equazione $x'+x''+x'''+x^{IV}=0$, che nasce dalla mancanza del secondo termine nella proposta, e facilmente ne dedurremo

$$x'=\frac{1}{4}(\pm\sqrt{t'}\pm\sqrt{t''}\pm\sqrt{t'''})$$
$$x''=\frac{1}{4}(\pm\sqrt{t'}\mp\sqrt{t''}\mp\sqrt{t'''})$$
$$x'''=\frac{1}{4}(\mp\sqrt{t'}\pm\sqrt{t''}\mp\sqrt{t'''})$$
$$x^{IV}=\frac{1}{4}(\mp\sqrt{t'}\mp\sqrt{t''}\pm\sqrt{t'''}).$$

Combinando i segni di ciascun radicale in tutti i modi possibili troveremo per l'espressione delle radici x', x'', x''', x^{IV} solamente i due diversi sistemi

$$\frac{1}{4}(\sqrt{t'}+\sqrt{t''}+\sqrt{t'''}) \qquad \frac{1}{4}(-\sqrt{t'}-\sqrt{t''}-\sqrt{t'''})$$
$$\frac{1}{4}(\sqrt{t'}-\sqrt{t''}-\sqrt{t'''}) \qquad \frac{1}{4}(-\sqrt{t'}+\sqrt{t''}+\sqrt{t'''})$$
$$\frac{1}{4}(-\sqrt{t'}+\sqrt{t''}-\sqrt{t'''}) \qquad \frac{1}{4}(\sqrt{t'}-\sqrt{t''}+\sqrt{t'''})$$
$$\frac{1}{4}(-\sqrt{t'}-\sqrt{t''}+\sqrt{t'''}) \qquad \frac{1}{4}(\sqrt{t'}+\sqrt{t''}-\sqrt{t'''})$$

il primo dei quali contiene quelle combinazioni, ove il segno del prodotto $\sqrt{t'}.\sqrt{t''}.\sqrt{t'''}$ è positivo, il secondo quelle, nelle quali il medesimo prodotto è negativo.

Questi due sistemi ci daranno le radici della proposta, e quelle di una diversa equazione. E così esser doveva; perchè

la trasformata in t contenendo solo il quadrato della b, il quale non varia quando b si cangia in $-b$, serve egualmente alla ricerca delle radici delle due equazioni

$$x^4+ax^2+bx+c=0$$
$$x^4+ax^2-bx+c=0.$$

La prima di esse si cangia nella seconda, se vi si pone $-x$ in luogo di x, e perciò la seconda ha le medesime radici che la prima, ma prese col segno contrario; e tali pur sono l'espressioni delle radici nei due precedenti sistemi.

Per vedere, quale di questi sistemi appartiene al caso di b positiva, e quale a quello di b negativa, ripigliamo l'equazioni

$$\sqrt{t'}=x'+x''-x'''-x^{IV}$$
$$\sqrt{t''}=x'+x'''-x''-x^{IV}$$
$$\sqrt{t'''}=x'+x^{IV}-x''-x'''$$

e moltiplicandole insieme avremo $\sqrt{t'}.\sqrt{t''}.\sqrt{t'''}$ espresso per una funzione invariabile delle radici della proposta, che troveremo $=-\frac{b}{8}$ quando nella proposta il coefficiente di x è $+b$, ed $=\frac{b}{8}$ quando questo coefficiente è $-b$. Il segno adunque del prodotto $\sqrt{t'}.\sqrt{t''}.\sqrt{t'''}$ dovrà esser negativo nel primo caso, e positivo nel secondo, e quindi il secondo sistema di radici apparterrà all'equazione, in cui il coefficiente b di x è positivo, il primo a quella, in cui il coefficiente $-b$ di x è negativo. Potevamo render più brevi le precedenti risoluzioni, specialmente quella dell'equazioni del terzo grado, se avessimo subito scelta quella combinazione, che ci conduceva alla risoluzione della proposta. Ma abbiamo amato meglio di tener la via più lunga, perchè altrimenti avremmo lasciati ignorare ai nostri Leggitori i motivi, che ci avevano determinati a tale scelta, ed avremmo forse anco potuto in essi indurre l'errore, che qualunque combinazione sia egualmente adattata a farci conseguire l'intento.

18.

Le funzioni delle radici da noi considerate nei due numeri antecedenti non sono le sole, che conducano alla risoluzione dell'equazioni del terzo e del quarto grado; ma vi sono infinite altre funzioni, le quali producono il medesimo effetto. Noi contenti di avere ottenuto l'intento mediante le funzioni della

più semplice forma rimetteremo quei dei nostri Leggitori, che desiderassero una più ampia istruzione alle citate *Riflessioni* di *Lagrange*. La generale ricerca delle funzioni opportune allo scioglimento di questo problema era più interessante, quando si sperava di trarne qualche lume per la risoluzione dell'equazioni del quinto grado. Ma questa speranza è del tutto svanita, dopo che l'insigne Geometra *Ruffini* ha dimostrato essere impossibile la generale risoluzione dell'equazioni di grado superiore al quarto. Sarebbe per noi troppo lungo l'entrare nei dettagli della dimostrazione di questo importante teorema, la quale può vedersi nella eccellente *Teoria dell'equazioni* pubblicata da questo Autore. E quì giova osservare che la risoluzione generale dell'equazioni, i progressi della quale si devono agli Analisti Italiani *Scipione Ferri*, *Tartaglia*, *Ferrari*, *Bombelli*, ha ricevuto il suo compimento per opera di due Italiani Geometri *Lagrange* e *Ruffini*.

19.

Ma quantunque non si possano risolvere l'equazioni generali di un grado superiore al quarto, vi sono però molte equazioni particolari, le quali sebbene di un grado più elevato del quarto si possono risolvere, perchè sono abbassabili ad un grado inferiore. Ogni equazione è suscettibile di una tale riduzione di grado, quando esiste qualche particolare relazione tra alcune delle sue radici. Allorchè si conosce questa relazione o per la forma della equazione data, o per la natura del problema, da cui è nata la medesima equazione, i metodi precedenti c'insegneranno a conseguire quell'abbassamento, di cui la proposta è capace, come quì brevemente mostreremo. Sia dunque data una equazione del grado m, di cui le radici siano espresse con le lettere x', x'', x''', . . . $x^{(m)}$, e supponghiamo che si conosca un particolare rapporto tra le radici x', x'', x''' . . . $x^{(p)}$. Questo rapporto ci condurrà ad una equazione, in cui il primo membro sarà una funzione delle radici x', x'', x''', . . . $x^{(p)}$, ed il secondo una quantità data K; in modo che conosceremo il valor K di una funzione $f.(x')(x'')(x''')$ . . . $(x^{(p)})$, la qual funzione, come pure il di lei valore K, supponghiamo razionale.

Ponghiamo primieramente che la relazione data abbia luogo tra le sole radici $x', x'', x''', \ldots x^{(p)}$, ed in una sola maniera, di modo che cessi di sussistere per qualunqne permutazione tra le radici $x', x'', x''', \ldots x^{(m)}$. In tal caso facendo $t'=f.(x')(x'')(x''')\ldots(x^{(p)})$, ed y' successivamente $=x', x'', x''', \ldots x^{(p)}$, siccome il valore t' della funzione non ne ha altri egnali, potremo (13) esprimere ciascuna di queste radici razionalmente per t' cioè per K; onde saranno tutte commensurabili. E tolte queste radici dalla proposta mediante la divisione per i corrispondenti fattori, essa si ridurrà al grado $m-p$, ed ammetterà una soluzione completa, se $m-p$ non è >4.

20.

Se la data relazione sussisterà in più maniere, cioè se la forma della funzione $f.(x')(x'')(x''')\ldots(x^{(p)})$ sarà tale, che essa conservi il medesimo valore K per varie permutazioni tra le radici, convien distinguere tre casi, secondo che queste permutazioni si fanno tra le radici $x', x'', x''', \ldots x^{(p)}$, o le medesime radici $x', x'', x''', \ldots x^{(p)}$ si permutano con le altre $x^{(p+1)}, x^{(p+2)}, x^{(p+3)}$, ec., o finalmente le radici $x', x'', x''', \ldots x^{(p)}$ si cangiano e tra loro e con le altre $x^{(p+1)}, x^{(p+2)}, x^{(p+3)}$, ec.

Per incominciare dal primo caso ponghiamo che la funzione data abbia la forma $f.(x', x'')(x''')\ldots(x^{(p)})$, la quale conserva il medesimo valore K per la permutazione di x' in x''. Facendo y' successivamente $=x''', x^{IV}, \ldots x^{(p)}$ troveremo come sopra tutte queste radici espresse razionalmente per K; ma se facciamo $y'=x'$, siccome al medesimo valore K corrispondono due diverse radici x', x'', queste non potranno esprimersi razionalmente per K, ma verranno date da una equazione del secondo grado

$$x^2+ax+b=0,$$

ove i coefficienti a e b saranno razionali. La proposta avrà, come sopra, un fattore commensurabile del grado p, e divisa per esso si ridurrà al grado $m-p$.

Più generalmente se la funzione data avrà la forma $f.(x', x'', x''', \ldots, x^{(q)})(x^{(q+1)}) \ldots (x^{(p)})$, l'istesso discorso ci mostrerà che le radici $x', x'', \ldots x^{(q)}$ dipenderanno da una equazione del grado q

$$x^q + ax^{q-1} + bx^{q-2} + cx^{q-3} + \text{ec.} = 0,$$

ove i coefficienti a, b, c, ec. saranno commensurabili, e le altre radici $x^{(q+1)}$, $x^{(q+2)}$, $\ldots x^{(p)}$ saranno razionali. In tutte le combinazioni, che ammette questo primo caso, la proposta sarà abbassabile di grado, eccettuata quella, in cui fosse $q=p=m$, poichè allora tutte le radici x', x'', x''', $\ldots x^{(m)}$ dipenderebbero da una equazione del grado m, che sarebbe la proposta medesima. Dal che apparisce, che le relazioni tra le radici tutte della proposta, le quali vengono espresse dai coefficienti della medesima, e più generalmente il valore di qualunque funzione invariabile delle stesse radici è inutile all'abbassamento della proposta.

21.

Venendo al secondo caso supponghiamo la funzione data esser tale, che cangi di valore ad ogni permutazione tra le radici $x', x'', x''', \ldots x^{(p)}$, dalle quali è composta, ma si mantenga costante allorchè si muta x' in $x^{(p+1)}$, x'' in $x^{(p+2)}$, x''' in $x^{(p+3)}$, $\ldots x^{(p)}$ in $x^{(2p)}$. In questo caso se col metodo precedente cercheremo x', non potremo averla espressa razionalmente per K, poichè al medesimo valore K della funzione corrispondono due radici diverse, cioè x' ed $x^{(p+1)}$, le quali saranno insieme radici di una equazione di secondo grado

$$x^2 + ax + b = 0,$$

ove però i coefficienti a e b saranno commensurabili. Poichè questi coefficienti essendo respettivamente eguali a $-x'-x^{(p+1)}$,

ed $x'.x^{(p+1)}$, avranno un solo valore corrispondente al valor K della funzione. Così pure le radici x'', $x^{(p+2)}$, le radici x''', $x^{(p+3)}$, ec. dipenderanno da altrettante equazioni razionali di secondo grado.

Se la funzione data si mantiene costante, anche quando si muta x' in $x^{(2p+1)}$, x'' in $x^{(2p+2)}$, x''' in $x^{(2p+3)}$, ... $x^{(p)}$ in $x^{(3p)}$, col medesimo discorso vedremo che le radici x', $x^{(p+1)}$, $x^{(2p+1)}$, le radici x'', $x^{(p+2)}$, $x^{(2p+2)}$, ec. dipenderanno da equazioni razionali del terzo grado. E così in seguito.

22.

Passiamo a considerare il terzo caso, in cui la funzione data mantiene il suo valore, quando nel medesimo tempo si permutano le radici x', x'', x''', ... $x^{(p)}$ tra loro, e con le altre radici. Sia dunque la funzione della forma $f.(x', x'')(x''')\ldots(x^{(p)})$, la quale si conserva invariabile alla permutazione di x' in x'', e supponghiamo che essa mantenga il medesimo valore K, anche quando si cangia x' in $x^{(p+1)}$, x'' in $x^{(p+2)}$, ... $x^{(p)}$ in $x^{(2p)}$. Le radici x''' ed $x^{(p+3)}$, x^{IV} ed $x^{(p+4)}$, ... $x^{(p)}$ ed $x^{(2p)}$ dipenderanno come sopra a due a due da equazioni razionali del secondo grado; ma le radici x', x'', $x^{(p+1)}$, $x^{(p+2)}$, le quali corrispondono ad un medesimo valore K della funzione, richiederanno per la loro determinazione una equazione del quarto grado. Si potrà ancora ottenere due equazioni del secondo

$$x^2+a'x+b'=0$$
$$x^2+a''x+b''=0$$

la prima delle quali abbia le due radici x' ed x'', e la seconda le radici $x^{(p+1)}$, ed $x^{(p+2)}$; ma quest'equazioni non saranno razionali. Poichè al medesimo valore K corrispondendo le due diverse quantità a' ed a'', o sia $-x'-x''$, e $-x^{(p+1)}-x^{(p+2)}$,

queste quantità saranno radici di una medesima equazione razionale di secondo grado. Lo stesso si dica dei coefficienti b' e b''.

E se la funzione data mantenesse il valore K anche per le permutazioni di x' in $x^{(2p+1)}$, x'' in $x^{(2p+2)}$, x''' in $x^{(2p+3)}$, ... $x^{(p)}$ in $x^{(3p)}$, avremo per determinare le radici x', x'' l'equazione

$$x^2+a'x+b'=0,$$

per le radici $x^{(p+1)}$, $x^{(p+2)}$ l'equazione

$$x^2+a''x+b''=0,$$

e finalmente per le radici $x^{(2p+1)}$, $x^{(2p+2)}$ l'equazione

$$x^2+a'''x+b'''=0,$$

e dal medesimo discorso apparirà, che i tre coefficienti a', a'', a''' saranno radici di una medesima equazione del terzo grado. Se la proposta fosse in questo caso del sesto grado, non avrebbe in generale alcun fattore razionale, ma la di lei risoluzione dipenderebbe da quella dell'equazioni del secondo e del terzo grado.

Ponghiamo che la funzione data abbia la forma $f.(x', x''; x''')(x^{IV}) \ldots (x^{(p)})$, e conservi il medesimo valore K quando diventa $f.(x^{(p+1)}, x^{(p+2)}, x^{(p+3)})(x^{(p+4)})..(x^{(2p)})$. Lo stesso ragionamento ci mostrerà, che le tre radici x', x'', x''' dipenderanno dall'equazione di terzo grado

$$x^3+a'x^2+b'x+c'=0,$$

e le radici $x^{(p+1)}$, $x^{(p+2)}$, $x^{(p+3)}$ da una simile equazione

$$x^3+a''x^2+b''x+c''=0,$$

ove i coefficienti a', a'' saranno radici di una medesima equazione razionale del secondo grado: e lo stesso si dica dei coefficienti b' e b'', e così pure dei coefficienti c' e c''. E se la funzione data mantenesse il medesimo valore K, anche quando diviene $f.(x^{(2p+1)}, x^{(2p+2)}, x^{(2p+3)})(x^{(2p+4)}) \ldots (x^{(3p)})$, oltre le precedenti equazioni del terzo grado avremmo per determinare le radici $x^{(2p+1)}$, $x^{(2p+2)}$, $x^{(2p+3)}$ anche la seguente

$$x^3+a'''x^2+b'''x+c'''=0,$$

ed i coefficienti a', a'', a''' sarebbero in questo caso radici di una medesima equazione del terzo grado. Da quello che abbiamo detto abbastanza si vede il metodo, con cui dobbiamo condurci in tutti gli altri casi. Merita di esser letta una bella Memoria su questo argomento, che il chiarissimo *Ruffini* ha pubblicata nel volume IX. della Societa Italiana delle Scienze.

23.

Per illustrare questa materia con un'esempio consideriamo quell'equazioni, che si chiamano *reciproche* o *convertibili*, nelle quali il coefficiente del primo termine è eguale all'ultimo, il coefficiente del secondo è eguale a quello del penultimo, e generalmente i coefficienti equidistanti dai termini estremi sono eguali. Tali equazioni sono rappresentate dalla seguente

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \ldots + Bx^2 + Ax + 1 = 0,$$

ove il grado m si può considerare come pari ed $= 2n$, perchè se fosse dispari, la proposta avrebbe una radice $= -1$, e divisa per $x+1$ conserverebbe la medesima forma reciproca. È evidente che posto $\frac{1}{x}$ in luogo di x l'equazione si mantiene la medesima, e quindi se x' è una di lei radice, un'altra sarà $\frac{1}{x'}$. Perciò se chiamiamo x', x'', x''', x^{IV}, $\ldots x^{(2n)}$ le radici della proposta, avremo tra esse i seguenti rapporti; $x'x'' = 1$, $x'''x^{IV} = 1$, $x^{V}x^{VI} = 1$, $\ldots x^{(2n-1)}.x^{(2n)} = 1$. È dunque data una relazione tra le radici x' ed x'', la quale non cangia quando esse si permutano tra loro, e che sussiste egualmente tra le radici x''' ed x^{IV}, x^{V} ed x^{VI}, $\ldots x^{(2n-1)}$ ed $x^{(2n)}$; e perciò (22) queste radici saranno a due a due contenute nell'equazioni seguenti

$$x^2 - a'x + 1 = 0$$
$$x^2 - a''x + 1 = 0$$
$$x^2 - a'''x + 1 = 0$$
$$\vdots$$
$$x^2 - a^{(n)}x + 1 = 0,$$

le quali saranno n di numero, ed i coefficienti a', a'', a''', a^{IV}, ... $a^{(n)}$ saranno radici di una medesima equazione del grado n.

Per trovare con facilità questa trasformata, della quale l'incognita sia y, osservo che in generale $x^2-yx+1=0$, e quindi $x+\frac{1}{x}=y$; onde bisognerà nella proposta sostituire y in luogo di $x+\frac{1}{x}$. Ponghiamo la proposta sotto la forma

$$x^n+\frac{1}{x^n}+A\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right)+B\left(x^{n-2}+\frac{1}{x^{n-2}}\right)+\text{ec.}=0,$$

e tutto ridurrassi ad esprimere per y il valore di $x^r+\frac{1}{x^r}$. Ora l'equazione $x+\frac{1}{x}=y$ ci dà $x^2+2+\frac{1}{x^2}=y^2$, e perciò $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$; così pure $x^3+3\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^3}=y^3$, ed $x^3+\frac{1}{x^3}=y^3-3y$; $x^4+4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+6+\frac{1}{x^4}=y^4$, ed $x^4+\frac{1}{x^4}=y^4-4y^2+2$, e così in seguito. Onde in generale apparisce, che $x^r+\frac{1}{x^r}$ avrà la forma seguente

$$x^r+\frac{1}{x^r}=y^r-My^{r-2}+M_1y^{r-4}-M_2y^{r-6}+M3y^{r-8}-\text{ec.}$$

Ponghiamo in luogo di y il suo valore $x+\frac{1}{x}$, e svolgendo i termini otterremo

$$x^r+\frac{1}{x^r}=x^r+\frac{1}{x^r}+r\left(x^{r-2}+\frac{1}{x^{r-2}}\right)+\frac{r(r-1)}{2}\left(x^{r-4}+\frac{1}{x^{r-4}}\right)+\text{ec.}$$
$$-M\left(x^{r-2}+\frac{1}{x^{r-2}}\right)-M(r-2)\left(x^{r-4}+\frac{1}{x^{r-4}}\right)-\text{ec.}$$
$$+M_1\left(x^{r-4}+\frac{1}{x^{r-4}}\right)+\text{ec.}$$

e quindi avremo per determinare i coefficienti M, $M1$, $M2$, $M3$, ec. l'equazioni

$$r-M=0$$

$$\frac{r(r-1)}{2}-M(r-2)+M1=0$$

$$\frac{r(r-1)(r-2)}{2\cdot 3}-M\frac{(r-2)(r-3)}{2}+M1(r-4)-M2=0$$

ec.

dalle quali si deduce

$$M=r$$

$$M1=\frac{r(r-3)}{2}$$

$$M2=\frac{r(r-4)(r-5)}{2\cdot 3}$$

e generalmente

$$M(s)=\frac{r(r-s-2)(r-s-3)(r-s-4)\ldots(r-2s-1)}{2\cdot 3\ldots(s+1)}.$$

Il calcolo delle differenze finite ci somministra un modo elegante di risolvere questo stesso problema. La quantità $x^r+\frac{1}{x^r}$ dopo la sostituzione del valore di x diventerà una funzione di y ed r, che chiameremo $z_{y,r}$, e ponendo $r+1$ in luogo di r avremo $x^{r+1}+\frac{1}{x^{r+1}}=z_{y,r+1}$. Ma la quantità

$$x^{r+1}+\frac{1}{x^{r+1}} \text{ è } =\left(x^r+\frac{1}{x^r}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-x^{r-1}-\frac{1}{x^{r-1}}=yz_{y,r}-z_{y,r-1};$$

dunque avremo la seguente equazione a differenze finite

$$z_{y,r+1}-yz_{y,r}+z_{y,r-1}=0,$$

ove y si può riguardare come costante. L'integrazione di essa ci darà, com' è noto

$$z_{y,r}=C\frac{[y+\sqrt{(y^2-4)}]^r}{2^r}+C1\frac{[y-\sqrt{(y^2-4)}]^r}{2^r},$$

e per determinare le quantità C e $C1$ rifletteremo che $z_{y,r}$ dev'essere $=2$ quando $r=0$, ed $=y$ quando $r=1$. A tali condizioni soddisfaremo facendo

$$C+C_1=2$$
$$\frac{(C+C_1)y+(C-C_1)\sqrt{(y^2-4)}}{2}=y$$

dalle quali equazioni si deduce $C=C_1=1$. Sarà pertanto

$$x^r+\frac{1}{x^r}=\frac{[y+\sqrt{(y^2-4)}]^r+[y-\sqrt{(y^2-4)}]^r}{2^r}.$$

Svolta questa espressione spariscono i radicali, e si ottiene

$$x^r+\frac{1}{x^r}=\frac{1}{2^{r-1}}\left(y^r+\frac{r(r-1)}{2}y^{r-2}(y^2-4)+\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{2.3.4}y^{r-4}(y^2-4)^2+\text{ec.}\right)$$

Al medesimo resultato saremmo giunti più semplicemente, se avessimo osservato che l'equazione $x^2-yx+1=0$ ci dava

$$x^r=\frac{[y\pm\sqrt{(y^2-4)}]^r}{2^r},\text{ ed }\frac{1}{x^r}=\frac{2^r}{[y\pm\sqrt{(y^2-4)}]^r}=\frac{[y\mp\sqrt{(y^2-4)}]^r}{2^r},$$

e perciò

$$x^r+\frac{1}{x^r}=\frac{[y\pm\sqrt{(y^2-4)}]^r+[y\mp\sqrt{(y^2-4)}]^r}{2^r},$$

ove è indifferente che al radicale $\sqrt{(y^2-4)}$ si dia il segno + o −.

Si poteva anche per altra parte prevedere, che la sostituzione $x+\frac{1}{x}=y$ avrebbe abbassato della metà il grado della proposta. Poichè le radici della trasformata in y saranno $x'+\frac{1}{x'}$, $x''+\frac{1}{x''}$, $x'''+\frac{1}{x'''}$, $x^{IV}+\frac{1}{x^{IV}}$, ec.: ma siccome $x''=\frac{1}{x'}$, $x^{IV}=\frac{1}{x'''}$, ec., le medesime radici saranno così espresse; $x'+\frac{1}{x'}$, $\frac{1}{x'}+x'$, $x'''+\frac{1}{x'''}$, $\frac{1}{x'''}+x'''$, ec., cioè saranno eguali a due a due. Quindi la trasformata in y, che dovrebbe essere del grado $2n$, si abbasserà da se stessa al grado n.

Potrebbe ancora usarsi utilmente la sostituzione $x=\frac{1-y}{1+y}$, la quale ci dà $y=\frac{1-x}{1+x}$. Perchè le radici della trasformata in y

sarebbero $\frac{1-x'}{1+x'}$, $\frac{1-x''}{1+x''}$, $\frac{1-x'''}{1+x'''}$, $\frac{1-x^{IV}}{1+x^{IV}}$, ec. o sia (a motivo delle relazioni esistenti tra le radici x' ed x'', x''' ed x^{IV}, ec.) $\frac{1-x'}{1+x'}$, $\frac{x'-1}{x'+1}$, $\frac{1-x'''}{1+x'''}$, $\frac{x'''-1}{x'''+1}$, ec. La trasformata adunque avendo tutte le sue radici eguali a due a due e di segni contrarj non conterrà che le potenze pari di y, e posto $y^2=z$ si ridurrà alla metà del suo grado.

24.

Nelle cose precedenti abbiamo spesso avuto bisogno di calcolare le funzioni invariabili delle radici di una data equazione. Quantunque nel primo Tomo siano date le regole necessarie per eseguire questo calcolo, pure ripigliando la medesima materia esporremo alcuni generali teoremi, dai quali una tal ricerca dipende. Sia dunque proposta l'equazione

$$x^m - Ax^{m-1} + A'x^{m-2} - A''x^{m-3} \ldots \pm A^{(m-1)} = 0,$$

di cui le radici siano x', x'', x''', $\ldots$ $x^{(m)}$, ed avremo

$$x^m - Ax^{m-1} + A'x^{m-2} - A''x^{m-3} \ldots \pm A^{(m-1)}$$
$$= (x-x')(x-x'')(x-x''') \ldots\ldots (x-x^{(m)}),$$

e ponendo $x=\frac{1}{z}$

$$1 - Az + A'z^2 - A''z^3 \ldots\ldots \pm A^{(m-1)} z^m$$
$$= (1-x'z)(1-x''z)(1-x'''z) \ldots\ldots (1-x^{(m)}z).$$

Prendiamo i logaritmi, ed otterremo

$$\log.(1 - Az + A'z^2 - A''z^3 \ldots \pm A^{(m-1)} z^m)$$
$$= \log.(1-x'z) + \log.(1-x''z) + \log.(1-x'''z) \ldots + \log.(1-x^{(m)}z),$$

e svolgendo in serie i logaritmi del secondo membro di questa equazione

$$\log.(1 - Az + A'z^2 - A''z^3 \ldots \pm A^{(m-1)} z^m)$$
$$= -(x' + x'' + x''' \ldots\ldots + x^{(m)})z$$
$$-(x'^2 + x''^2 + x'''^2 \ldots\ldots + x^{(m)2})\frac{z^2}{2}$$
$$-(x'^3 + x''^3 + x'''^3 \ldots\ldots + x^{(m)3})\frac{z^3}{3}$$
$$-\text{ec.}$$

Denotiamo col segno $P^{(n)}$ la somma delle potenze $n.^{esime}$ delle radici della proposta, cioè la quantità $x'^n+x''^n+x'''^n\ldots+x^{(m)n}$, e l'equazione precedente diventerà

$$(1)\qquad \log.(1-Az+A'z^2-A''z^3\ldots\pm A^{(m-1)}z^m) = -Pz-\frac{P^{(2)}}{2}z^2-\frac{P^{(3)}}{3}z^3-\frac{P^{(4)}}{4}z^4-\text{ec.}$$

Prendiamo i differenziali per rapporto a z, ed avremo

$$\frac{-A+2A'z-3A''z^2+\text{ec}}{1-Az+A'z^2-A''z^3+\text{ec.}} = -P-P^{(2)}z-P^{(3)}z^2-\text{ec.}$$

e togliendo le frazioni e paragonando i termini giungeremo alle solite formole

$$P=A$$
$$P^{(2)}=AP-2A'$$
$$P^{(3)}=AP^{(2)}-A'P+3A''$$
$$\text{ec.}$$

25.

Ma se volessimo una formola generale, la quale ci dasse il valore di $P^{(n)}$, consideriamo l'equazione (1), e ponendo $\log(1-Az+A'z^2-A''z^3\ldots\pm A^{(m-1)}z^m)=\phi$ vedremo che $-\frac{P^{(n)}}{n}$ sarà eguale al coefficiente di z^n nello sviluppo della funzione ϕ, il qual coefficiente sappiamo essere $\frac{d^n\phi}{2.3..ndz^n}$, purchè si faccia $z=o$ dopo le differenziazioni. Sarà dunque con questa condizione

$$P^{(n)}=-\frac{d^n.\log(1-Az+A'z^2-A''z^3\ldots\pm A^{(m-1)}z^m)}{2.3\ldots(n-1)dz^n}.$$

Per ottenere sotto un'altra forma il valore di $P^{(n)}$, facciamo

$$A-A'z+A''z^2-A'''z^3+\text{ec.}=t,$$

ed avremo

$$\phi=\log(1-tz)=-tz-\frac{t^2z^2}{2}-\frac{t^3z^3}{3}\ldots-\frac{t^nz^n}{n}-\text{ec.}$$

Ora il coefficiente di z^n in tz è eguale a $\frac{d^{n-1}t}{2.3\ldots(n-1)dz^{n-1}}$

in $\frac{t^2z^2}{2}$ $\quad$ $\frac{1}{2}\frac{d^{n-2}.t^2}{2.3\ldots(n-2)dz^{n-2}}$

in $\frac{t^3z^3}{3}$ $\quad$ $\frac{1}{3}\frac{d^{n-3}.t^3}{2.3\ldots(n-3)dz^{n-3}}$

. . .

in $\frac{t^nz^n}{n}$ $\quad$ $\frac{1}{n}t^n$

purchè si faccia $z=0$ dopo le differenziazioni. Dunque riunendo tutti questi valori avremo il coefficiente di z^n in ϕ così espresso;

$$-\frac{1}{n}t^n-\frac{1}{n-1}\frac{d.t^{n-1}}{dz}-\frac{1}{n-2}\frac{d^2.t^{n-2}}{2dz^2}-\frac{1}{n-3}\frac{d^3.t^{n-3}}{2.3dz^3}\ldots-\frac{d^{n-1}t}{2.3\ldots(n-1)dz^{n-1}},$$

ed in conseguenza otterremo

$$P^{(n)}=t^n+\frac{n}{n-1}\frac{d.t^{n-1}}{dz}+\frac{n}{n-2}\frac{d^2.t^{n-2}}{2dz^2}+\frac{n}{n-3}\frac{d^3.t^{n-3}}{2.3dz^3}\ldots+\frac{n}{1}\frac{d^{n-1}t}{2.3\ldots(n-1)dz^{n-1}}$$

ponendo in questo valore $z=0$.

Sia per esempio la proposta del secondo grado; sarà $t=A-A'z$, $\frac{dt}{dz}=-A'$, $\frac{d^2t}{dz^2}=0$, e facilmente vedrassi nel caso di $z=0$ essere $\frac{d^s.t^r}{dz^s}=\pm r(r-1)(r-2)\ldots(r-s+1)A^{r-s}A'^s$, ove il segno $+$ ha luogo se s è pari, ed il segno $-$ se s è dispari. Sostituendo questo valore troveremo

$$P^{(n)}=A^n-nA^{n-2}A'+\frac{n(n-3)}{2}A^{n-4}A'^2-\frac{n(n-4)(n-5)}{2.3}A^{n-6}A'^3+\text{ec.}$$

la qual formola si deve continuare, finchè gli esponenti di A non divengono negativi.

26.

Supponghiamo adesso, che siano dati i valori di P, $P^{(2)}$, $P^{(3)}$, ec., e si richieda di esprimere per mezzo di essi i coefficienti A, A', A'', ec. della proposta. Ripigliamo l'equazione

$$\log.(1-Az+A'z^2-A''z^3 \ldots \pm A^{(m-1)}z^m) = -Pz-\frac{P^{(2)}}{2}z^2-\frac{P^{(3)}}{3}z^3-\frac{P^{(4)}}{4}z^4-\text{ec.}$$

e passando dai logaritmi ai numeri otterremo

$$1-Az+A'z^2-A''z^3 \ldots \pm A^{(m-1)}z^m = e^{-Pz-\frac{P^{(2)}}{2}z^2-\frac{P^{(3)}}{3}z^3-\frac{P^{(4)}}{4}z^4-\text{ec.}}$$

ove e è la base dei logaritmi iperbolici. Di quì apparisce che il termine $A^{(n-1)}$ o $-A^{(n-1)}$, secondo che n è pari o dispari, sarà eguale al coefficiente di z^n nello sviluppo della funzione $e^{-Pz-\frac{P^{(2)}}{2}z^2-\text{ec.}}$, o sia della funzione e^{zu}, se facciamo

$$-P-\frac{P^{(2)}}{2}z-\frac{P^{(3)}}{3}z^2-\frac{P^{(4)}}{4}z^3-\text{ec.}=u.$$

Svolgendo in serie la quantità e^{zu} avremo

$$e^{zu}=1+zu+\frac{z^2u^2}{2}+\frac{z^3u^3}{2.3}\ldots+\frac{z^nu^n}{2.3\ldots n}+\text{ec.}$$

e con un ragionamento simile a quello usato nel numero precedente troveremo che il coefficiente di z^n in questa serie sarà rappresentato dalla formola

$$\frac{u^n}{2.3\ldots n}+\frac{1}{2.3\ldots(n-1)}\cdot\frac{d.u^{n-1}}{dz}+\frac{1}{2.3\ldots(n-2)}\cdot\frac{d^2.u^{n-2}}{2dz^2}\ldots+\frac{d^{n-1}u}{2.3\ldots(n-1)dz^{n-1}},$$

purchè si faccia $z=0$ dopo le differenziazioni: e questo sarà il valore del coefficiente $\pm A^{(n-1)}$.

27.

Ci sia permesso quì di passaggio osservare, che lo stesso metodo si può applicare allo sviluppo in serie di qualunque funzione, la quale abbia la forma

$$F.(a+bz+cz^2+ez^3+fz^4+\text{ec.})$$

Questa funzione, posto

$$b+cz+ez^2+fz^3+\text{ec.}=t$$

diventerà $F.(a+tz)$, e svolta in serie per mezzo del teorema di *Taylor* ci darà

$$F(a+tz)=F.a+\frac{dF.a}{da}tz+\frac{d^2Fa}{2da^2}t^2z^2\ldots+\frac{d^nFa}{2.3\ldots nda^n}t^nz^n+\text{ec.}$$

Quindi il coefficiente di z^n nello sviluppo della funzione proposta sarà espresso dalla formola

$$\frac{d^nFa}{2.3\ldots nda^n}t^n+\frac{d^{n-1}Fa}{2.3\ldots(n-1)da^{n-1}}.\frac{dt^{n-1}}{dz}$$
$$+\frac{d^{n-2}F.a}{2.3\ldots(n-2)da^{n-2}}.\frac{d^2t^{n-2}}{2dz^2}\ldots+\frac{dF.a}{da}.\frac{d^{n-1}t}{2.3\ldots(n-1)dz^{n-1}}$$

purchè vi si ponga $z=o$ dopo le differenziazioni. Questa formola, alla quale il chiarissimo *Arbogast* è già stato condotto dal suo *Calcolo delle derivazioni*, ci disimpegna dalla considerazione della funzione F di un polinomio, e riduce tutto alla ricerca dei coefficienti delle potenze del polinomio t.

28.

Trovate le somme delle potenze delle radici cerchiamo adesso la somma dei prodotti che si formano, quando si moltiplicano tra loro le potenze delle radici. Indichiamo col segno $P^{(m\,,\,n)}$ la somma di tutti i prodotti della forma $x'^m.x''^n$, che nascono da tutte le permutazioni tra le radici della proposta, col segno $P^{(m\,,\,n\,,\,p)}$ la somma dei prodotti della forma $x'^m.x''^n.x'''^p$, col segno $P^{(m\,,\,n\,,\,p\,,\,q)}$ la somma dei prodotti $x'^m.x''^n.x'''^p.x^{IV\,q}$, e così in seguito; e cerchiamo il valore di queste quantità $P^{(m\,,\,n)}$, $P^{(m\,,\,n\,,\,p)}$, $P^{(m,\,n\,,\,p\,,\,q)}$, ec.

Se moltiplichiamo tra loro le due quantità $P^{(a_1)}$ e $P^{(a_2)}$, nasceranno da questa moltiplicazione tutti i termini della forma $x'^{a_1+a_2}$, e tutti quei della forma $x'^{a_1}.x''^{a_2}$; onde sarà $P^{(a_1)}.P^{(a_2)}=P^{(a_1+a_2)}+P^{(a_1,a_2)}$, e quindi

$$(1)\quad P^{(a_1,a_2)}=P^{(a_1)}.P^{(a_2)}-P^{(a_1+a_2)}.$$

Moltiplicando tra loro le tre quantità $P^{(a_1)}$, $P^{(a_2)}$, e $P^{(a_3)}$ otterremo tutti i termini della forma $x'^{a_1+a_2+a_3}$, tutti quei della forma $x'^{a_1+a_2}.x''^{a_3}$, quelli della forma $x'^{a_1+a_3}.x''^{a_2}$, quelli della forma $x'^{a_2+a_3}.x''^{a_1}$, e finalmente quei della forma $x'^{a_1}.x''^{a_2}.x'''^{a_3}$. Sarà dunque

$$P^{(a_1,a_2,a_3)}=P^{(a_1)}.P^{(a_2)}.P^{(a_3)}-P^{(a_1+a_2,a_3)}-P^{(a_2+a_3,a_2)}$$
$$-P^{(a_2+a_3,a_1)}-P^{(a_1+a_2+a_3)}.$$

Ma dalla equazione (1) abbiamo $P^{(a_1+a_2,a_3)}=P^{(a_1+a_2)}.P^{(a_3)}$
$-P^{(a_1+a_2+a_3)}$, $P^{(a_1+a_3,a_2)}=P^{(a_1+a_3)}.P^{(a_2)}-P^{(a_1+a_2+a_3)}$,
$P^{(a_2+a_3,a_1)}=P^{(a_2+a_3)}.P^{(a_1)}-P^{(a_1+a_2+a_3)}$. Dunque sostituendo questi valori avremo

$$(2)\ P^{(a_1,a_2,a_3)}=P^{(a_1)}.P^{(a_2)}.P^{(a_3)}-P^{(a_1+a_2)}.P^{(a_3)}+2P^{(a_1+a_2+a_3)}.$$
$$-P^{(a_1+a_3)}.P^{(a_2)}$$
$$-P^{(a_2+a_3)}.P^{(a_1)}$$

Col medesimo ragionamento troveremo

$$P^{(a_1,a_2,a_3,a_4)}=P^{(a_1)}.P^{(a_2)}.P^{(a_3)}.P^{(a_4)}-P^{(a_1+a_2,a_3,a_4)}$$
$$-P^{(a_1+a_3,a_2,a_4)}-P^{(a_1+a_4,a_2,a_3)}$$
$$-P^{(a_2+a_3,a_1,a_4)}-P^{(a_2+a_4,a_1,a_3)}$$
$$-P^{(a_3+a_4,a_1,a_2)}-P^{(a_1+a_2+a_3,a_4)}$$
$$-P^{(a_1+a_2+a_4,a_3)}-P^{(a_1+a_3+a_4,a_2)}$$
$$-P^{(a_2+a_3+a_4,a_1)}-P^{(a_1+a_2,a_3+a_4)}$$
$$-P^{(a_1+a_3,a_2+a_4)}-P^{(a_1+a_4,a_2+a_3)}$$
$$-P^{(a_1+a_2+a_3+a_4)}$$

e sostituendo i valori di $P^{(a_1+a_2,a_3,a_4)}$, ec. dedotti dalla equazione (2), e quei di $P^{(a_1+a_2+a_3,a_4)}$, ec. e di $P^{(a_1+a_2,a_3+a_4)}$, ec. dedotti dalla equazione (1) avremo

$$
\begin{aligned}
(3)\quad P^{(a_1,a_2,a_3,a_4)} = {} & P^{(a_1)}.P^{(a_2)}.P^{(a_3)}.P^{(a_4)} \\
& -P^{(a_1+a_2)}.P^{(a_3)}.P^{(a_4)} - P^{(a_1+a_3)}.P^{(a_2)}.P^{(a_4)} \\
& -P^{(a_1+a_4)}.P^{(a_2)}.P^{(a_3)} - P^{(a_2+a_3)}.P^{(a_1)}.P^{(a_4)} \\
& -P^{(a_2+a_4)}.P^{(a_1)}.P^{(a_3)} - P^{(a_3+a_4)}.P^{(a_1)}.P^{(a_2)} \\
& +2P^{(a_1+a_2+a_3)}.P^{(a_4)} + 2P^{(a_1+a_2+a_4)}.P^{(a_3)} \\
& +2P^{(a_1+a_3+a_4)}.P^{(a_2)} + 2P^{(a_2+a_3+a_4)}.P^{(a_1)} \\
& -6P^{(a_1+a_2+a_3+a_4)} \\
& +P^{(a_1+a_2)}.P^{(a_3+a_4)} + P^{(a_1+a_3)}.P^{(a_2+a_4)} \\
& +P^{(a_1+a_4)}.P^{(a_2+a_3)}.
\end{aligned}
$$

Senza proseguire più oltre queste operazioni, dopo una breve riflessione sulla natura della moltiplicazione delle potenze, la quale consiste nella somma degli esponenti, facilmente ci persuaderemo, che il valore di $P^{(a_1,a_2,a_3,\ldots a_n)}$ sarà composto di tutti i termini della forma $P^{(r)}.P^{(r')}.P^{(r'')}.P^{(r''')}$ ec., ove sarà $r+r'+r''+r'''+\text{ec.} = a_1+a_2+a_3\ldots+a_n$, e ciascuna delle lettere r sarà eguale ad una o più delle quantità $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$, e ciò in tutti i modi possibili, secondo i quali le quantità a_1, a_2, a_3, ec. si possono combinare, o prendendone una sola, o la somma di due, o la somma di tre, ec. Siano m, m', m'', m''', ec. respettivamente i numeri delle quantità a_1, a_2, a_3, ec. contenute in r, r', r'', r''', ec., ed avremo $m+m'+m''+m'''+\text{ec.} = n$. Riuniamo insieme tutti i termini simili, nei quali cioè i valori delle lettere m, m', m'', m''', ec. sono i medesimi, e denotiamo questa somma col segno $Q_{m,m',m'',m'''\text{, ec.}}$. Questo segno adunque indicherà la somma di tutti i termini della forma

$$P^{(a_1+a_2\ldots+a_m)}.P^{(a_{m+1}+a_{m+2}\ldots+a_{m+m'})}.P^{(a_{m+m'+1}+\ldots+a_{m+m'+m''})}.\text{ ec.}$$

e ponendo in luogo di m, m', m'', ec. tutti i numeri, che soddisfanno all'equazione $m+m'+m''+\text{ec.}=n$, otterremo tutti i termini, che compongono il valore di $P^{(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)}$.

Usando questa maniera di scrivere potremo più semplicemente esprimere i valori trovati nell'equazioni (1), (2), e (3), le quali diventeranno

(1) $P^{(a_1, a_2)}=Q_{1,1}-Q_2$

(2) $P^{(a_1, a_2, a_3)}=Q_{1,1,1}-Q_{2,1}+2Q_3$

(3) $P^{(a_1, a_2, a_3, a_4)}=Q_{1,1,1,1}-Q_{2,1,1}+2Q_{3,1}-6Q_4+Q_{2,2}$.

Per maggior semplicità tralasceremo nel segno $Q_{m, m', m''}$, ec. quelle lettere m', m'', m''', ec. che sono eguali all'unità, e scriveremo Q_1 in luogo di $Q_{1,1,1,1}$ ec., Q_m invece di $Q_{m,1,1,1}$, ec., $Q_{m,m'}$ in luogo di $Q_{m,m',1,1,1}$, ec. e così in seguito. Rappresenterà dunque Q_m la somma dei termini della forma $P^{(a_1+a_2+a_3\ldots+a_m)}.P^{(a_{m+1})}.P^{(a_{m+2})}\ldots P^{(a_n)}$, che nascono da tutte le permutazioni possibili tra le quantità $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$. Così pure $Q_{m,m'}$ esprimerà tutti i termini diversi della forma $P^{(a_1+a_2\ldots+a_m)}.P^{(a_{m+1}+a_{m+2}\ldots+a_{m+m'})}.P^{(a_{m+m'+1})}\ldots P^{(a_n)}$, ec.

Ciò posto, se chiamiamo $z_{m, m', m''}$, ec. il coefficiente, che ha $Q_{m, m', m''}$, ec. nel valore di $P^{(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)}$, sarà $z_{m, m', m''}$, ec. $.Q_{m, m', m''}$, ec. il termine generale della formola, che rappresenta questo valore, e per dedurne tutti i termini di una tal formola bisognerà prendere per m, m', m'', ec. quei numeri, che soddisfanno in tutti i modi possibili all'equazione $m+m'+m''+\text{ec.}=n$. Avremo pertanto

$$p^{(a_1,a_2,a_3,\ldots a_n)} = z_1 Q_1 + z_2 Q_2 + z_3 Q_3 + z_4 Q_4$$

$$+ z_{2,2} Q_{2,2}$$

$$+ z_5 Q_5 \quad + z_6 Q_6 \quad + z_7 Q_7$$

$$+ z_{3,2} Q_{3,2} + z_{4,2} Q_{4,2} \quad + z_{5,2} Q_{5,2}$$

$$+ z_{3,3} Q_{3,3} \quad + z_{4,3} Q_{4,3}$$

$$+ z_{2,2,2} Q_{2,2,2} + z_{3,2,2} Q_{3,2,2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ z_n Q_n$$

$$+ z_{n-2,2} Q_{n-2,2}$$

(A)

$$+ z_{n-3,3} Q_{n-3,3}$$

$$+ \text{ec.}$$

$$+ z_{n-4,2,2} Q_{n-4,2,2}$$

$$+ z_{n-5,3,2} Q_{n-5,3,2}$$

$$+ \text{ec.}$$

$$+ z_{n-6,2,2,2} Q_{n-6,2,2,2}$$

$$+ \text{ec.}$$

$$+ z_{n-8,2,2,2,2} Q_{n-8,2,2,2,2}$$

$$+ \text{ec.}$$

Conviene adesso determinare i coefficienti z_1, z_2, z_4, ec., lo che forma la parte più difficile di questa ricerca. Si osservi in primo luogo, che questi coefficienti sono quantità numeriche introdotte dalle sostituzioni, e indipendenti non solo dal valore ma anche dal numero degli esponenti a_1, a_2, a_3, ... a_n, in modo che se nella formola $p^{(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)}$ mancherà uno di essi, per esempio a_n, il valore delle quantità

Q_1, Q_2, Q_3, ec. diventerà più semplice, ma i coefficienti z_1, z_2, z_3, ec. dei termini, che rimangono, saranno gli stessi. Poichè trovato il valore di $P^{(a_1, a_2, a, \ldots, a_n)}$, per aver quello di $P^{(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1})}$ bisognerà porre nel primo $a_n = 0$; ora questa supposizione farà mancare alcuni dei termini compresi nelle quantità Q_1, Q_2, Q_3, ec, ma lascerà il medesimo coefficiente ai termini che rimarranno. Così nella equazione (1) essendo $z_1 = 1$, sarà $z_1 = 1$ in ogni caso.

In secondo luogo si rifletta che, se aggiungiamo la quantità a_{n+1} alle altre $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$, in modo che si cerchi il valore della formola $P^{(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n+1})}$, questo valore ci verrà dato dalla espressione precedente $z_1 Q_1 + z_2 Q_2 + $ec., purchè nel comporre le quantità Q_1, Q_2, Q_3, ec. si abbia riguardo alla lettera a_{n+1} oltre le altre $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$; e di più, siccome n si è cangiata in $n+1$, converrà aggiungere a tal'espressione i termini

$$
\begin{aligned}
&z_{n+1} Q_{n+1} \\
&+ z_{n-1, 2} Q_{n-1, 2} \\
&+ z_{n-2, 3} Q_{n-2, 3} \\
&+ \text{ec.} \\
&+ z_{n-3, 2, 2} Q_{n-3, 2, 2} \\
&+ \text{ec.} \\
&+ z_{n-5, 2, 2, 2} Q_{n-5, 2, 2, 2} \\
&+ \text{ec.}
\end{aligned}
$$

La ricerca dei coefficienti z_1, z_2, ec. si riduce a vedere, come questi nuovi termini per l'aggiunta della quantità a_{n+1} nascano dai precedenti.

A quest'oggetto si osservi che

$$P^{(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n)}.P^{(a_{n+1})}=P^{(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_{n+1})}$$
$$+P^{(a_1+a_{n+1},a_2,a_3,\ldots,a_n)}+P^{(a_1,a_2+a_{n+1},a_3,\ldots,a_n)}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+P^{(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n+a_{n+1})}.$$

Quindi il valore di $P^{(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_{n+1})}$ nascerà dal valore di $P^{(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n)}$, se prima questo si moltiplicherà per $P^{(a_{n+1})}$, lo che non porterà altra mutazione nella formola (A), se non che i valori di Q_1, Q_2, ec. riesciranno più complicati, poi se da questo prodotto si sottrarrà n volte l'espressione (A), prima ponendovi a_1+a_{n+1} in luogo di a_1, poi a_2+a_{n+1} in luogo di a_2, e così in seguito fino a porvi a_n+a_{n+1} in luogo di a_n. Da queste sottrazioni nasceranno i nuovi termini $z_{n+1}Q_{n+1}$+ec. nel modo seguente.

Il termine $z_{n+1}Q_{n+1}$ nascerà dal termine z_nQ_n, quando in luogo di a_1 vi si porrà a_1+a_{n+1}; poichè essendo Q_n della forma $P^{(a_1+a_2+a_3\ldots+a_n)}$, allorchè vi si mette a_1+a_{n+1} invece di a_1 diventerà della forma $P^{(a_1+a_2+a_3\ldots+a_{n+1})}$, cioè Q_{n+1}. Così pure, posto a_2+a_{n+1} in luogo di a_2, o a_3+a_{n+1} in luogo di a_3, ec., o finalmente a_n+a_{n+1} in luogo di a_n, la quantità Q_n diventa Q_{n+1}. Quindi il termine $z_{n+1}Q_{n+1}$ nasce dal termine z_nQ_n preso negativamente n volte, perchè tante sono le variazioni di a_1 in a_1+a_{n+1}, di a_2 in a_2+a_{n+1}, ec., nelle quali tutte la quantità Q_n diventa Q_{n+1}; sarà dunque $z_{n+1}=-nz_n$.

Il termine $Q_{n-2,2}$ essendo della forma $P^{(a_1+a_2\ldots+a_{n-2})}.P^{(a_{n-1}+a_n)}$ produrrà il termine $Q_{n-1,2}$ allorchè si aggiunge a_{n+1} a ciascuna delle lettere $a_1, a_2, \ldots a_{n-2}$; ove però conviene osservare che non tutti i termini della forma $Q_{n-1,2}$ sono prodotti dal termine $Q_{n-2,2}$, poichè in questo si aggiungono ad a_{n+1} tutte le lettere contenute nel primo segno P, ma non quelle del secondo segno; onde mediante questa operazione a_{n+1} non si trova mai nel secondo segno. Che se nella quantità $Q_{n-2,2}$ aggiungessimo a_{n+1} alle lettere del secondo segno, ne verrebbero dei termini non della forma $Q_{n-1,2}$, ma della forma $Q_{n-2,3}$, che considereremo in seguito. Sarà però vero che, il coefficiente dei termini della forma $Q_{n-1,2}$, i quali risultano da $Q_{n-2,2}$, essendo $z_{n-1,2}$, avremo $z_{n-1,2}=-(n-2)z_{n-2,2}$. Gli altri termini non compresi tra i precedenti ci verranno dati dal termine Q_{n-1}, il quale è della forma $P^{(a_1+a_2\ldots+a_{n-1})}.P^{(a_n)}$, allorchè si aggiungerà a_{n+1} alla sola lettera del secondo segno P. La differenza tra questi termini ed i primi si è, che nei primi a_{n+1} si combina con le altre lettere del primo segno P, e non è mai nel secondo segno; nei secondi a_{n+1} si combina con la lettera del secondo segno e non è mai nel primo. Ma come non vi è nel secondo segno di Q_{n-1} che una sola lettera, ciascuna sottrazione non produrrà che un solo termine, e questo diverso dai termini delle altre sottrazioni. Se dunque $z_{n-1,2}$ è il coefficiente di questa porzione dei termini di $Q_{n-1,2}$, sarà $z_{n-1,2}=-1.z_{n-1}$. Ora siccome nella quantità $P^{(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n+1})}$ tutte le lettere a_1, a_2, ec.

entrano egualmente, dovrà perciò essere il medesimo il coefficiente della prima e della seconda porzione di termini, e quindi avremo $z_{n-1,\,2}=-(n-2)z_{n-2,\,2}=-1.z_{n-1}$.

Il termine $Q_{n-2,\,3}$ nascerà similmente per una parte dal termine $Q_{n-3,\,3}$, per l'altra dal termine $Q_{n-2,\,2}$, se nel primo si aggiungerà a_{n+1} a tutte le lettere del primo segno P, e nel secondo si aggiungerà a_{n+1} a tutte le lettere del secondo segno; e le due porzioni di termini saranno diverse, perchè nella prima a_{n+1} si combinerà con tutte le lettere del primo segno, e non sarà mai nel secondo, e nell'altra a_{n+1} si varierà con le lettere del secondo segno e non sarà mai nel primo. Inoltre siccome in $Q_{n-3,\,3}$ sono nel primo segno $n-3$ lettere, aggiunta a_{n+1} a ciascuna di queste ne verranno $n-3$ termini simili; e così essendo due le lettere contenute nel secondo segno di $Q_{n-2,\,2}$, dalla somma di a_{n+1} con ciascuna di esse si produrranno due termini simili. Sarà pertanto
$z_{n-2,\,3}=-(n-3)z_{n-3,\,3}=-2z_{n-2,\,2}$.

Generalmente $Q_{r,\,r'}$ nascerà da $Q_{r-1,\,r'}$ aggiunta a_{n+1} a tutte le lettere del primo segno P, che sono $r-1$, e da $Q_{r,\,r'-1}$ aggiunta a_{n+1} a tutte le lettere del secondo segno, che sono $r'-1$. Onde avremo
$z_{r,\,r'}=-(r-1)z_{r-1,\,r'}=-(r'-1)z_{r,\,r'-1}$.

Passiamo a considerare un termine qualunque della forma $Q_{r,\,r',\,r''}$. Questo termine nascerà in parte da $Q_{r-1,\,r',\,r''}$ aggiunta a_{n+1} alle lettere del primo segno P, in parte da $Q_{r,\,r'-1,\,r''}$ sommata a_{n+1} con le lettere del secondo segno, e finalmente in parte da $Q_{r,\,r',\,r''-1}$ se a_{n+1} si aggiungerà alle lettere del terzo segno. Nel primo caso si combinerà a_{n+1} con le lettere del primo segno, nel secondo con quelle del secondo, nel terzo con quelle del terzo; e perciò si avranno tutti

i termini, perchè si sono prese tutte le combinazioni. Ora si osservi che, in $Q_{r-1,\,r',\,r''}$ essendo $r-1$ le lettere, alle quali si aggiunge a_{n+1}, e che producono tutte termini simili, saranno $r-1$ i termini simili prodotti da $Q_{r-1,\,r',\,r''}$; così pure $r'-1$ saranno i termini simili prodotti da $Q_{r,\,r'-1,\,r''}$, e finalmente $r''-1$ i termini simili prodotti da $Q_{r,\,r',\,r''-1}$. Onde $-(r-1)z_{r-1,\,r',\,r''}$ sarà il coefficiente della prima porzione di termini, $-(r'-1)z_{r,\,r'-1,\,r''}$ il coefficiente della seconda porzione, e $-(r''-1)z_{r,\,r',\,r''-1}$ quello della terza porzione. Ma tutti i termini devono avere il medesimo coefficiente $z_{r,\,r',\,r''}$; dunque sarà

$$z_{r,r',r''}=-(r-1)z_{r-1,\,r',\,r''}=-(r'-1)z_{r,\,r'-1,\,r''}=-(r''-1)z_{r,r',\,r''-1}.$$

In generale apparisce, che avremo tra i coefficienti della formola (A) le seguenti equazioni

$$\begin{aligned} z_{r,\,r',\,r'',\,r''',\,\text{ec.}} &= -(r-1)z_{r-1,\,r',\,r'',\,r''',\,\text{ec.}} \\ &= -(r'-1)z_{r,\,r'-1,\,r'',\,r''',\,\text{ec.}} \\ &= -(r''-1)z_{r,\,r',\,r''-1,\,r''',\,\text{ec.}} \\ &= -(r'''-1)z_{r,\,r',\,r'',\,r'''-1,\,\text{ec.}} \\ &= \text{ec.} \end{aligned}$$

Rimane adesso ad integrare quest'equazioni, le quali sono a differenze finite e parziali.

Consideriamo l'equazione

$$z_{r,\,r',\,r'',\,r''',\,\text{ec.}} = -(r-1)z_{r-1,\,r',\,r'',\,r''',\,\text{ec.}}$$

e siccome in questa le quantità r', r'', r''', ec. non soffrono alcuna variazione, le potremo riguardare come costanti. In tal caso l'integrale della proposta, com'è noto, sarà $z_{r,\,r',\,r'',\,r''',\,\text{ec.}} = \pm 1.2.3\ldots(r-1)c$, ove si deve prendere il segno + se r è dispari, ed il segno — se r è pari. Ma poichè le quantità r', r'', r''', ec. sono state riguardate come costanti, la costante c potrà esser funzione di esse, e perciò l'integrale completo della proposta sarà

$$z_{r,r',r'',r''',\text{ec.}} = \pm 1.2.3\ldots(r-1)F.(r',r'',r''',\text{ec.})$$

Per determinare la funzione arbitraria F si sostituisca il valore trovato di $z_{r,r',r'',r''',\text{ec.}}$ nella equazione

$$z_{r,r',r'',r''',\text{ec.}} = -(r'-1)z_{r,r'-1,r'',r''',\text{ec.}}$$

giacchè anch'essa deve aver luogo, e si otterrà

$$F.(r',r'',r''',\text{ec.}) = -(r'-1)F(r'-1,r'',r''',\text{ec.})$$

la qual'equazione integrata nel medesimo modo ci darà

$$F.(r',r'',r''',\text{ec.}) = \pm 1.2.3\ldots(r'-1)F(r'',r''',\text{ec.})$$

ove il segno + si prenderà nel caso di r' dispari, ed il segno — nel caso di r' pari. Se si continuerà la sostituzione nella equazione

$$z_{r,r',r'',r''',\text{ec.}} = -(r''-1)z_{r,r',r''-1,r''',\text{ec.}}$$

e nelle seguenti, diminuirà sempre di una unità il numero delle variabili contenute nella funzione arbitraria; onde finalmente essa si ridurrà eguale ad una costante. Sarà pertanto

$$z_{r,r',r'',r''',\text{ec.}} = \pm c.1.2.3..(r-1).\pm 1.2\,3..(r'-1).\pm 1.2.3...(r''-1).\text{ec.}$$

Per determinare questa costante c, nel valore di z_r facciamo $r=2$, ed avremo $z_2=-c$: ma l'equazione $z_r=-(r-1)z_{r-1}$ ci dà $z_2=-z_1$; dunque $c=z_1=1$, come abbiamo notato di sopra. Avremo dunque

$$z_{r,r',r'',\text{ec.}} = (-1)^{r-1+r'-1+r''-1+\text{ec.}}.1.2.3..(r-1).1.2.3..(r'-1).1.2..(r''-1).\text{ec.}$$

cioè sarà

$$z_r = (-1)^{r-1}.1.2.3...(r-1)$$

$$z_{r,r'} = (-1)^{r+r'-2}.1.2.3...(r-1).1.2.3...(r'-1)$$

$$z_{r,r',r''} = (-1)^{r+r'+r''-3}.1.2.3...(r-1).1.2...(r'-1).1.2...(r''-1).$$

ec.

Sostituiti i valori di questi coefficienti la formola (A) ci darà il valore della quantità $P^{(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n)}$. Questa formola è quella istessa, che senza dimostrazione è stata proposta dall'insigne Analista *Eduardo Waring* nelle sue opere, una delle quali ha per titolo *Miscellanea Analytica*, e l'altra *Medita-*

tiones Algebraicae, e serve a determinare per i coefficienti di una equazione data qualunque funzione razionale invariabile delle sue radici, poichè una tal funzione è sempre composta di termini della forma $P^{(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)}$.

29.

Aggiungeremo a quest'Opuscolo alcune altre ricerche spettanti alla teoria dell'equazioni, e primieramente faremo conoscere il modo elegantissimo, con cui il sommo Geometra *Laplace* ha dimostrato, che l'equazioni tutte composte di termini reali sono risolubili in fattori reali di primo o di secondo grado. Sia dunque proposta una equazione qualunque del grado m, di cui le radici siano x', x'', x''', ec., e sia $x^2 - ux + V = 0$ un di lei fattore di secondo grado, il quale contenga due delle sue radici. Sarà u una funzione della forma $x' + x''$, ed V una funzione della forma $x'x''$, e per i principj precedenti tanto u che V dipenderanno da una equazione del grado $\frac{m(m-1)}{2}$. Ma noi cercheremo invece il valore della quantità $u + aV$, ove a è un numero dato, e la trasformata $X = 0$, di cui questa quantità è radice, sarà anch'essa del grado $n = \frac{m(m-1)}{2}$.

Ponghiamo in primo luogo che questa trasformata abbia sempre una radice reale, qualunque sia il valore di a, lo che avverrebbe necessariamente, se $\frac{m(m-1)}{2}$ fosse un numero dispari. Dando infiniti valori ad a avremo infinite trasformate, ciascuna delle quali avrà una radice reale; e siccome è determinato il numero delle combinazioni, che possono farsi con due radici della proposta, molte di queste radici reali delle trasformate si riferiranno al medesimo fattore della proposta. Siano A, A' due di queste radici delle diverse trasformate, che sono funzioni di due medesime radici della proposta, ed a', a'' i corrispondenti valori di a; avremo $u + a'V = A$, $u + a''V = A'$, e quindi i valori di u ed V saranno reali, e tale sarà pure il fattore $x^2 - ux + V = 0$.

Abbia in secondo luogo la trasformata $X = 0$ per qualunque valore di a un fattore reale di secondo grado, di cui le radici essendo immaginarie avranno la forma $A + B\sqrt{-1}$; e dando in-

finiti valori ad a otterremo infinite equazioni, ciascuna delle quali avrà una radice della forma $A+B\sqrt{-1}$. Tra tutte queste radici scegliamone due $A+B\sqrt{-1}$ ed $A'+B'\sqrt{-1}$, che si riferiscano al medesimo fattore della proposta, e siano a', a'' i valori di a, che corrispondono ad esse. Avremo $u+a'V=A+B\sqrt{-1}$, $u+a''V=A'+B'\sqrt{-1}$, dalle quali equazioni si deduce che u ed V saranno ciascuna della forma $C+D\sqrt{-1}$, ed il fattore della proposta riescirà

$$x^2-(C+D\sqrt{-1})x+E+F\sqrt{-1}=0.$$

La risoluzione di questa equazione ci darà il fattore di primo grado

$$x-\frac{C+D\sqrt{-1}}{2}-\frac{\sqrt{(G+H\sqrt{-1})}}{2}=0,$$

ove $G=C^2-D^2-4E$, $H=2CD-4F$. Facciamo

$$\sqrt{(G+H\sqrt{-1})}+\sqrt{(G-H\sqrt{-1})}=2P$$
$$\sqrt{(G+H\sqrt{-1})}-\sqrt{(G-H\sqrt{-1})}=2Q$$

e prendendo i quadrati otterremo

$$2G+2\sqrt{(G^2+H^2)}=4P^2$$
$$2G-2\sqrt{(G^2+H^2)}=4Q^2,$$

dal che apparisce che P^2 è una quantità positiva, e Q^2 una quantità negativa, e perciò P una quantità reale, e Q una quantità immaginaria della forma $R\sqrt{-1}$. Sarà dunque $\sqrt{(G+H\sqrt{-1})}=P+Q=P+R\sqrt{-1}$, e perciò la proposta avrà il fattore

$$x-\frac{C+P}{2}-\frac{D+R}{2}\sqrt{-1}=0.$$

Questo porta seco necessariamente l'altro fattore

$$x-\frac{C+P}{2}+\frac{D+R}{2}\sqrt{-1}=0,$$

e dal loro prodotto nasce il fattore reale di secondo grado

$$\left(x-\frac{C+P}{2}\right)^2+\frac{(D+R)^2}{4}=0.$$

Nell'istessa maniera l'altro fattore

$$x-\frac{C+D\sqrt{-1}}{2}+\frac{\sqrt{(G+H\sqrt{-1})}}{2}=0$$

ci condurrà al fattore reale di secondo grado

$$\left(x-\frac{C-P}{2}\right)^2+\frac{(D-R)^2}{4}=0.$$

Se fosse $D+R=0$, il primo fattore $\left(x-\frac{C+P}{2}\right)^2+\frac{(D+R)^2}{4}=0$ si ridurrebbe al solo fattor semplice $x-\frac{C+P}{2}=0$, e così avremmo il fattor semplice $x-\frac{C-P}{2}=0$, se fosse $D-R=0$. In ciascuno di questi casi la proposta avrà due fattori reali, uno del primo e l'altro del secondo grado. E se nel medesimo tempo fosse $D+R=0$ e $D-R=0$, cioè $R=0$, e $D=0$, la proposta avrebbe i due fattori reali di primo grado $x-\frac{C+P}{2}=0$, $x-\frac{C-P}{2}=0$, i quali per mezzo della moltiplicazione ci darebbero un fattore reale di secondo grado. È dunque dimostrato che la proposta avrà sempre un fattore reale del secondo grado, quando la trasformata $X=0$ ha un fattore reale del primo o del secondo grado.

Ponghiamo in luogo della proposta la trasformata $X=0$, e deducendo da questa la corrispondente trasformata $X'=0$, che sarà del grado $n'=\frac{n(n-1)}{2}$, con un simile ragionamento vedremo che la trasformata $X=0$ ed in conseguenza la proposta avrà un fattore reale di secondo grado, se la trasformata $X'=0$ ne avrà uno del primo o del secondo grado. E così dalla equazione $X'=0$ passando alla di lei trasformata $X''=0$ del grado $n''=\frac{n'(n'-1)}{2}$, e da questa alla seguente $X'''=0$ del grado $n'''=\frac{n''(n''-1)}{2}$, e così in seguito; se mai giungeremo ad ottenere una trasformata, la quale abbia un fattor reale del primo o del secondo grado, ne concluderemo che tutte le trasformate precedenti ed infine la proposta medesima avrà un fattore reale del secondo grado.

Qualunque sia il grado m della equazione data, tenendo conto della massima potenza di 2 in esso contenuta potremo rappresentarlo per mezzo di $2^p.q$, ove p è un numero intero qualunque, e q un numero dispari. Il grado n della prima tra-

sformata sarà $\frac{2^p.q(2^p.q-1)}{2}=2^{p-1}.q'$, se facciamo

$q'=q(2^p.q-1)$, ove si osservi che q', essendo eguale al prodotto di due numeri dispari, è anch'esso dispari. In egual modo i gradi n', n'', n''', ec. delle seguenti trasformate saranno respettivamente $2^{p-2}.q''$, $2^{p-3}.q'''$, $2^{p-4}.q^{IV}$, ec. essendo q'', q''', q^{IV}, ec. numeri dispari. Ma siccome l'esponente del 2 và sempre diminuendo dell'unità, giungeremo finalmente ad una trasformata di grado dispari, la quale avendo necessariamente una radice reale porterà un fattore reale di secondo grado in tutte le precedenti trasformate, ed in fine nella medesima equazione data. Pertanto qualunque equazione ha un fattore reale di secondo grado, e tolto questo mediante la divisione l'equazione, che ne risulta, avrà di nuovo un fattore reale di secondo grado, e così in seguito; e perciò qualunque equazion reale è composta di fattori reali del primo o del secondo grado.

3o.

Il metodo di *Lagrange* da noi esposto nel Cap. XIV. della Parte I. per la ricerca delle radici dell'equazioni numeriche per approssimazione richiede il calcolo di quella trasformata, che ha per radici tutte le differenze tra le radici della proposta. Trovata questa trasformata se ne deduce facilmente il valore Δ di una quantità minore della più piccola differenza tra le radici della proposta, e vien determinata la serie $0, \Delta, 2\Delta, 3\Delta$, ec., i termini della quale successivamente sostituiti in luogo di x nel primo membro della proposta ci faranno sicuramente conoscere tutte le radici reali della medesima. Ma quanto è necessaria la cognizione della quantità Δ, altrettanto è imbarazzante il doverla ripetere da una trasformata, il calcolo della quale è estremamente laborioso, e quasi impraticabile, se la proposta è di un grado alquanto elevato. Perciò l'immortale *Lagrange* ha procurato d'immaginare altri mezzi meno difficili pel ritrovamento della quantità Δ, cioè di un limite minore della più piccola tra le differenze delle radici della proposta. Abbiamo creduto opportuno di esporre gl'ingegnosi artifizj ritrovati da lui per compimento di quanto abbiamo detto nel citato Capitolo sulla risoluzione dell'equazioni numeriche.

Sia dunque proposta l'equazione

$$X=x^m-Ax^{m-1}+Bx^{m-2}-Cx^{m-3}+\text{ec.}=0,$$

e supponghiamo che x' rappresenti un'altra radice di questa diversa da x; avremo ancora

$$x'^m-Ax'^{m-1}+Bx'^{m-2}-Cx'^{m-3}+\text{ec.}=0.$$

Indichiamo per u la differenza tra le radici x ed x', in modo che sia $x'=x+u$, e sostituendo in luogo di x' questo valore nell'ultima equazione otterremo

$$P+Qu+Ru^2+Su^3\ldots+u^m=0.$$

ove sarà

$$P=x^m-Ax^{m-1}+Bx^{m-2}-Cx^{m-3}+\text{ec.}=X=0$$

$$Q=mx^{m-1}-(m-1)Ax^{m-2}+(m-2)Bx^{m-3}-\text{ec.}=\frac{dX}{dx}$$

$$R=\frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}-\frac{(m-1)(m-2)}{2}Ax^{m-3}+\text{ec.}=\frac{d^2X}{2dx^2}$$

$$S=\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}x^{m-3}-\text{ec.}=\frac{d^3X}{2.3\,dx^3}$$

ec.

Ma poichè $P=0$, avremo dividendo per u

$$Q+Ru+Su^2\ldots\ldots+u^{m-1}=0.$$

Se in questa equazione si pone in luogo di x una radice della proposta, essa avrà per radici le differenze tra questa radice e tutte le altre della proposta. Quindi se in luogo di x vi si sostituiscono successivamente tutte le radici della proposta, si otterranno m equazioni in u, le quali avranno per radici tutte le possibili differenze tra le radici della proposta. Pertanto si avrà il valore conveniente di Δ, se si farà eguale ad una quantità più piccola della minima tra le radici di queste m equazioni in u.

31.

Ponghiamo $u=\frac{1}{i}$, e l'equazione in u si cangerà in

$$Q+\frac{R}{i}+\frac{S}{i^2}\ldots+\frac{1}{i^{m-1}}=0,$$

la quale moltiplicata per i^{m-1} e divisa per Q diventerà

$$i^{m-1} + \frac{R}{Q} i^{m-2} + \frac{S}{Q} i^{m-3} \ldots + \frac{1}{Q} = 0 .$$

Supponendo che in questa equazione si sostituiscano una dopo l'altra in luogo di x tutte le radici della proposta, sia l il limite più grande della massima tra le radici positive delle m equazioni in i, che da tali sostituzioni risultano. È chiaro che $\frac{1}{l}$ sarà minore del più piccolo valore di u, ed in conseguenza potrà prendersi $\Delta = \frac{1}{l}$. Ora è noto che il massimo coefficiente negativo di una equazione preso positivamente ed accrescinto dell'unità è maggiore della massima radice negativa. Dunque la ricerca del limite l si riduce a trovare il più gran valore negativo, che risulterebbe dalla sostituzione in luogo di x delle m radici della proposta nei coefficienti $\frac{R}{Q}$, $\frac{S}{Q}$, ec., o una quantità maggiore di questo valore.

32.

Se i coefficienti $\frac{R}{Q}$, $\frac{S}{Q}$, ec. fossero funzioni intere di x, si potrebbe risolvere il problema con sostituire in questi coefficienti in luogo di x nei termini positivi un limite minore della più piccola radice positiva della proposta, e nei termini negativi un limite più grande della massima radice positiva. Infatti è evidente, che i resultati negativi, nei quali per queste sostituzioni si cangerà ciascun coefficiente, saranno maggiori di quelli che nascerebbero dalla sostituzione nel medesimo coefficiente delle radici positive della proposta. E riguardo alle radici negative, si porrà nei medesimi coefficienti $-x$ in luogo di x, e poi si sostituirà nei termini positivi un limite minore della più piccola radice negativa presa positivamente, e nei termini negativi un limite maggiore della massima radice negativa resa anch'essa positiva. Il massimo risultato negativo, che nasce da queste sostituzioni, preso positivamente ed accresciuto dell'unità sarà certamente maggiore del più grande valore positivo di i.

Relativamente ai valori negativi di i si porrà $-i$ in luogo di i nella equazione in i, o sia si cangeranno i segni del secondo termine, del quarto, ec.; e ripetute le medesime operazioni il massimo coefficiente negativo, che si otterrà, preso positivamente ed accresciuto dell'unità sarà maggiore del più gran valore negativo di i preso positivamente. Ma è da osservarsi, che u rappresentando la differenza tra due qualunque radici della proposta è egualmente positiva che negativa, e tale pure sarà i, perchè $i=\frac{1}{u}$, cioè i valori negativi di i saranno prescindendo dal segno eguali ai positivi: onde il limite l, che è maggiore del massimo valore positivo, sarà ancora maggiore del più gran valore negativo preso positivamente, e viceversa il limite maggiore del massimo valore negativo preso positivamente lo sarà insieme del più gran valore positivo. Sarà dunque indifferente per la ricerca del limite l che i si riguardi o come positiva o come negativa; ma tornerà bene di ripetere le operazioni nell'una e nell'altra ipotesi, affine di scegliere il più piccolo tra i due valori di l, che ne risulteranno.

33.

Ma siccome i coefficienti $\frac{R}{Q}$, $\frac{S}{Q}$, ec. sono funzioni fratte di x, il metodo precedente non può adoprarsi, se prima non si trova il modo di togliere la x dal denominatore Q. Uno dei mezzi, che il primo si è presentato a *Lagrange*, è quello di porvi invece di Q un numero più piccolo del minimo di quei valori, che essa acquisterebbe per la sostituzione delle radici della proposta in luogo di x; poichè è evidente che i coefficienti $\frac{R}{Q}$, $\frac{S}{Q}$, ec. riesciranno così più grandi di tutti quelli, che nascerebbero, se in luogo di Q vi si ponessero i valori esatti. Per trovare il numero adattato a porsi in luogo di Q facciamo $Q=y$, ed eliminando x dalle due equazioni $X=0$ e $Q-y=0$ otterremo una equazione in y del grado $m.^{esimo}$, la quale avrà per radici tutti i valori, che Q riceve per la sostituzione in essa delle radici della proposta. Sia h il limite minore della più piccola radice positiva della equazione in y, ed h' il limite minore della

più piccola radice negativa presa positivamente; e saranno h e $-h'$ i numeri che dovremo successivamente porre in luogo di Q, cioè dovremo praticare le operazioni indicate nel n.° precedente sulle quantità $\frac{R}{h}$, $\frac{S}{h}$, ec. $-\frac{R}{h'}$, $-\frac{S}{h'}$, ec.

34.

Siccome il calcolo della equazione in y presenta molte difficoltà, *Lagrange* ha immaginato un'altro metodo, il quale oltre ad essere più facile somministra un valore più piccolo per l, ed in conseguenza più grande per Δ. Questo consiste nel moltiplicare ambedue i termini delle frazioni $\frac{R}{Q}$, $\frac{S}{Q}$, ec. per un fattore tale, il quale faccia sparire la x dal denominatore. Prendiamo un polinomio

$$Y=x^{m-1}+ax^{m-2}+bx^{m-3}+cx^{m-4}+\text{ec.}$$

del grado $m-1$, ove i coefficienti a, b, c, ec. sono indeterminati, e moltiplicandolo per Q avremo un polinomio del grado $2m-2$. L'equazione $X=0$ ci dà il valore di x^m, e moltiplicando successivamente per x, e sostituendo sempre nel risultato il valore di x^m otterremo tutte le potenze superiori ad x^{m-1} fino ad x^{2m-2} espresse per x^{m-1} e per le potenze inferiori. Posti questi valori nel polinomio QY esso si abbasserà al grado $m-1$; ed i termini, che contengono x si faranno sparire con porre eguali a zero i coefficienti di essi. Avremo così $m-1$ equazioni del primo grado, dalle quali dedurremo i valori delle quantità indeterminate a, b, c, ec, che sono esse pure $m-1$ di numero; ed il prodotto QY si ridurrà ad una quantità cognita, chiamando la quale K avremo $Q=\frac{K}{Y}$.

Se sostituiamo questo valore di Q nella equazione in i esso diventerà

$$i^{m-1}+\frac{RY}{K}i^{m-2}+\frac{SY}{K}i^{m-3}\ldots+\frac{Y}{K}=0,$$

e siccome i coefficienti $\frac{RY}{K}$, $\frac{SY}{K}$, ec. non contengono più x nel denominatore, potremo servirci del metodo esposto nel n.° 32.

per trovare un limite l più grande del massimo valore di i. I polinomj RY, SY, ec. potranno ridursi al grado $m-1$ con la sostituzione in essi dei valori di x^m e delle potenze superiori, come abbiamo fatto relativamente al polinomio QY. Questa riduzione non è assolutamente necessaria, e possono lasciarsi le quantità RY, SY, ec. quali sono, ma giova eseguirla per rendere più semplice il calcolo, e per ottenere un limite l più prossimo al massimo valore di i.

35.

Se mai si trovasse $K=0$, ciò indicherebbe che la proposta $X=0$ ha più radici eguali. Infatti siccome il polinomio QY, in cui i coefficienti a, b, c, ec. sono determinati come sopra, diviene $=K$, quando vi si sostituisce il valore di x^m ricavato dalla equazione $X=0$, cioè quando vi si pone attualmente $X=0$, questo polinomio avrà necessariamente la forma $ZX+K$, essendo Z un polinomio del grado $m-2$. Quindi se $K=0$, esso sarà divisibile per X, cioè avrà per fattori gli m fattori semplici della proposta. Ma il polinomio Y essendo del grado $m-1$ non può al più avere che $m-1$ di questi fattori; dunque la quantità $Q=\frac{dX}{dx}$ avrà per lo meno uno di tali fattori, e quando ciò succede, è noto che l'equazione $X=0$ ha più radici eguali...

Viceversa se la proposta ha più radici eguali, sarà sempre $K=0$. Poichè essendo in generale il polinomio QY della forma $ZX+K$, diventerà $=K$, qualunque radice della proposta vi si ponga in luogo di x. Ma se a è una radice multipla della proposta, essa sostitnita in luogo di x rende nulla la quantità Q e per conseguenza anche QY; dunque $K=0$. Quindi se la proposta avrà radici eguali, ne saremo avvertiti dalla equazione $K=0$, e togliendo con le solite regole dalla proposta i fattori eguali applicheremo i metodi precedenti alla equazione di un grado inferiore, che ne risulterà, sicuri di non trovare per rapporto a questa $K=0$.

36.

Abbiamo supposto, che per eliminare la x da Q sia necessario moltiplicarla per un polinomio Y del grado $m-1$; ciò è

vero in generale, ma si danno alcuni casi, nei quali basta assumere per Y un polinomio di un grado inferiore ad $m-1$. Sia data per esempio l'equazione

$$x^3+3x^2+3x-1=0;$$

avremo $Q=3x^2+6x+3$. Prendiamo per Y il binomio $x+a$, e moltiplicando per questa la quantità Q otterremo

$$QY=3x^3+(6+3a)x^2+(3+6a)x+3a,$$

e ponendovi in luogo di x^3 il suo valore $-3x^2-3x+1$

$$QY=(3a-3)x^2+(6a-6)x+3a+3.$$

Ora se da questo prodotto facciamo sparire il coefficiente di x^2 ponendo $a=1$, svanirà egualmente il coefficiente di x, e K sarà $=6$.

In questi casi, nei quali si ottiene l'intento con prendere per Y un polinomio di un grado minore di $m-1$, saremmo molto imbarazzati, se giusta il metodo generale lo assumessimo del grado $m-1$. Nell'esempio precedente facciamo $Y=x^2+ax+b$, ed avremo

$$QY=3x^4+(6+3a)x^3+(3+6a+3b)x^2+(3a+6b)x+3b.$$

Ma la proposta ci dà $x^3=-3x^2-3x+1$, $x^4=-3x^3-3x^2+x=6x^2+10x-3$; dunque sostituiti questi valori sarà

$$QY=(3-3a+3b)x^2+(12-6a+6b)x+3a+3b-3.$$

Perchè sparisca la x da questo prodotto, conviene determinare a e b dalle due equazioni

$$1-a+b=0$$
$$2-a+b=0;$$

ma queste non possono insieme sussistere, almeno finchè si riguardano a e b come quantità finite.

Facciamo $a=\frac{a'}{c}$, $b=\frac{b'}{c}$, e quell'equazioni diventeranno

$$c-a'+b'=0$$
$$2c-a'+b'=0,$$

le quali ci danno $c=0$, e $b'=a'$. Sostituiti questi valori la quantità K si troverà $=\frac{6a'}{c}-3$, che a motivo di $c=0$ riescirà infinita, e perciò inutile al nostro intento. Ma la più leggiera riflessione basterà per togliere questo inconveniente, e per farci riconoscere che otterremo un valore soddisfaciente di K adoprando un moltiplicator del primo grado. Infatti siccome abbiamo trovato $QY=\frac{6a'}{c}-3$, sarà $cQY=6a'-3c=6a'$, perchè $c=0$, e que-

sto valore sarà finito, se ad a', che è una quantità indeterminata, daremo un valore finito; ed è evidente che avremmo trovato questo valore per K, se invece di moltiplicare Q per $x^2+\frac{a'}{c}x+\frac{b'}{c}$ l'avessimo moltiplicata per $c\left(x^2+\frac{a'}{c}x+\frac{b'}{c}\right)$, cioè per $a'x+b'$. Nella istessa maniera, ogniqualvolta si troverà K infinita, potrà senza un nuovo calcolo determinarsi il fattore di un grado inferiore ad $m-1$, il quale darà un valore soddisfaciente di K. Ma sarà più semplice di prendere in ogni caso il moltiplicatore Y della forma $ax^{m-1}+bx^{m-2}+cx^{m-3}+$ec. in luogo dell'altro assunto di sopra, che aveva l'unità per coefficiente del primo termine x^{m-1}, poichè, quando questo fattore dovrà essere di un grado inferiore, troveremo alcuni dei primi termini a, b, c, ec. eguali a zero. Rimane uno di questi coefficienti indeterminato, e potremo dare ad esso quel valore che ci piacerà, e quello che rende il calcolo più semplice.

37.

Per dare un esempio del metodo esposto proponghiamoci l'equazione

$$x^3-7x+7=0,$$

la quale ci dà $Q=3x^2-7$, $R=3x$, $S=1$. Incominciamo dal moltiplicare la quantità Q pel trinomio $Y=ax^2+bx+c$, e troveremo

$$Y=3ax^4+3bx^3+(3c-7a)x^2-7bx-7c.$$

Ma la proposta ci dà $x^3=7x-7$, ed $x^4=7x^2-7x$; dunque sostituendo questi valori di x^3 ed x^4 avremo

$$QY=(14a+3c)x^2+(14b-21a)x-21b-7c.$$

Adesso ponghiamo

$$14a+3c=0$$
$$14b-21a=0$$
$$K=-21b-7c,$$

e ne dedurremo $b=\frac{3}{2}a$, $c=-\frac{14}{3}a$, $K=\frac{7}{6}a$; e siccome a è in nostro arbitrio, per evitare le frazioni faremo $a=6$, ed avremo $b=9$, $c=-28$, $K=7$, ed $Y=6x^2+9x-28$. Moltiplichiamo Y per $R=3x$, e ponendovi poi in luogo di x^3 il suo valore avre-

mo $RY=27x^2+42x-126$, in modo che i coefficienti dell'equazione in i saranno

$$\frac{27x^2+42x-126}{7}, \quad \frac{6x^2+9x-28}{7}.$$

Conviene adesso cercare i limiti più grandi e più piccoli dei valori di x tanto positivi che negativi. Primieramente per trovare il limite più grande della massima radice positiva della proposta bisogna cercare quel numero, che preso per x rende positive le quantità

$$x^3-7x+7, \; 3x^2-7, \; 6x,$$

e siccome si vede che $x=2$ è il più piccolo numero intero, che soddisfaccia a queste condizioni, questo numero 2 è un limite maggiore delle radici positive. Ma affine di ottenere per l un valore più piccolo, tornerà conto di cercare un numero fratto più piccolo di 2, ed insieme maggiore delle radici positive. Si prenderà perciò un numero a piacere, per esempio 12, e si porrà $x=\frac{t}{12}$; le tre precedenti quantità diventeranno

$$t^3-1008t+12096, \; 3t^2-1008, \; 6t,$$

e come abbiamo veduto riescitanno positive, se prendiamo $t=24$: ma conviene osservare se lo stesso ottener si puo con porre $t=$ ad un numero il più che sia possibile minore di 24. Si trova che soddisfà il valore di $t=21$; dunque $\frac{21}{12}=\frac{7}{4}$ è un limite maggiore delle radici positive della proposta.

Riguardo al limite minore delle medesime radici positive si porrà $\frac{1}{x}$ in luogo di x nella quantità x^3-7x+7, e moltiplicata per x^3 diventerà $x^3-x^2+\frac{1}{7}$, e si cercherà quel numero che preso per x rende positive le quantità

$$x^3-x^2+\frac{1}{7}, \; 3x^2-2x, \quad 6x-2.$$

Si vede subito che 1 soddisfà a queste condizioni; ma operando come sopra troveremo che vi si può ancora soddisfare con un numero minore cioè $\frac{3}{4}$; dunque $\frac{4}{3}$ sarà il limite minore delle radici positive.

Nella equazione proposta $x^3-7x+7=0$ cangiamo i segni

dei termini in posto pari, e la risultante equazione $x^2-7x-7=0$ avrà le sue radici positive eguali alle negative della proposta prese positivamente. Ripetiamo in questa le medesime operazioni, e troveremo il limite maggiore delle sue radici positive essere $3\frac{1}{12}$, ed il limite minore 3, il quale è così prossimo alle radici, che non potrebbe accrescersi facendo $x=\frac{t}{12}$. Pertanto le radici positive della proposta cadono tra i numeri $\frac{4}{3}$ e $\frac{7}{4}$, e le negative tra i numeri -3 e $-\frac{37}{12}$.

Ripigliamo le quantità

$$\frac{27x^2+42x-126}{7}, \quad \frac{6x^2+9x-28}{7},$$

e sostituendovi in luogo di x il numero $\frac{4}{3}$ nei termini positivi, ed il numero $\frac{7}{4}$ nei negativi avremo i due resultati $-\frac{22}{7}$, e $-\frac{16}{21}$. Posta $-x$ in luogo di x quelle quantità diventano

$$\frac{27x^2-42x-126}{7}, \quad \frac{6x^2-9x-28}{7},$$

e sostituendovi 3 in luogo di x nei termini positivi, e $\frac{37}{12}$ nei termini negativi ci danno $-\frac{15}{4}$, e $-\frac{7}{28}$. Di tutti i resultati ottenuti il massimo negativo è $-\frac{22}{7}$; dunque avremo

$$l=\frac{22}{7}+1=\frac{29}{7}.$$

Se in grazia della riflessione fatta al n.° 32. porremo i negativa, cioè cangeremo i segni della quantità $\frac{27x^2+42x-126}{7}$, e ripeteremo su di essa così cangiata le preecdenti operazioni, otterremo per l un valore più grande; onde converrà attenersi a quello trovato di sopra. Avremo adunque $\Delta=\frac{1}{l}=\frac{7}{29}$, e questo valore sarà più piccolo della minima differenza tra le radici della equazione proposta.

OPUSCOLO III.

DELL' EQUAZIONI A DIFFERENZE PARZIALI FINITE ED INFINITESIME.

Nel Capitolo VIII. del *Calcolo Integrale* ho trattato dell'equazioni, che contengono i differenziali parziali, e nel Capitolo X. di quelle, che comprendono le differenze parziali finite. In quest'Opuscolo prendo a considerare un'altra classe di equazioni, le quali contengono insieme le differenze parziali e finite ed infinitesime, cioè, se z è una funzione delle variabili x, y, t ec. l'equazioni lineari tra la funzione z e le sue differenze finite prese relativamente ad alcune delle variabili x, y, t, ec., ed i differenziali della medesima funzione presi per rapporto al rimanente delle variabili x, y, t, ec. Il gran Geometra *Laplace* sembrami essere il solo, che abbia dato l'integrale di alcuna di quest'equazioni, applicando ad esse il suo ingegnosissimo metodo delle *funzioni generatrici* nel volume dell'Accademia delle Scienze di Parigi dell'anno 1779. L'integrazione di quest'equazioni non è un oggetto di pura curiosità, ma è dotata di varj usi molto apprezzabili, e da essa dipende la soluzione diretta di molti problemi relativi alle serie. La nuovità e l'importanza di tale argomento mi hanno determinato a prescieglierlo per formare una parte di questo volume, e ad esporre con qualch'estensione le ricerche, che ho fatte, per illustrare e promuovere questo ramo d'analisi.

1.

Se z_x rappresenta una funzione di x ed y, la forma generale dell'equazioni lineari a differenze parziali finite ed infinitesime del prim'ordine tra tre variabili x, y, e z_x è la seguente:

$$z_{x+1}=Az_x+B\frac{dz_x}{dy}+P,$$

ove A, B, e P sono funzioni di x ed y. Noi supporremo per ora $P=0$, ed A e B costanti, e per trovare un integrale particolare della proposta faremo $z_x=a^x e^{\beta y}$, ove a e β sono quantità costanti, ed e è il numero, che ha per logaritmo iperbolico l' unità. Sostituendo questo valore nella proposta e dividendo per $a^x e^{\beta y}$ otterremo $a=A+B\beta$; la qual'equazione esprime il rapporto, che devono aver tra loro le costanti a e β, perchè $z_x=a^x e^{\beta y}$ soddisfaccia alla proposta. Sarà dunque

$z_x=(A+B\beta)^x e^{\beta y}$, cioè svolta in serie la quantità $(A+B\beta)^x$

$$z_x=(A^x+xA^{x-1}B\beta+\frac{x(x-1)}{2}A^{x-2}B^2\beta^2\ldots+B^x\beta^x)e^{\beta y},$$

il qual valore si può mettere sotto la forma

$$z_x=A^x e^{\beta y}+xA^{x-1}B\frac{d.e^{\beta y}}{dy}+\frac{x(x-1)}{2}A^{x-2}B^2\frac{d^2.e^{\beta y}}{dy^2}\ldots+B^x\frac{d^x.e^{\beta y}}{dy^x},$$

e questo sarà un'integrale particolare della proposta.

Per dedurne l'integrale completo si osservi che, posto nella proposta il precedente valore di z_x, essa diventerà identica. Ma o cresca x dell' unità, o si differenzi z_x per rapporto ad y, è chiaro che in questa sostituzione si manterrà inalterata la quantità $e^{\beta y}$, e solo si cangeranno i coefficienti e gli esponenti della caratteristica d. E siccome β può esser qualunque, se dopo questa sostituzione si porranno tutti i termini dell'equazione da una parte e dall'altra zero, svaniranno i coefficienti di ciascuna delle quantità $e^{\beta y}$, $\frac{d.e^{\beta y}}{dy}$, $\frac{d^2.e^{\beta y}}{dy^2}$, ec. Quindi se nel valore di z_x si ponesse in luogo di $e^{\beta y}$ una funzione qualunque $F.y$ di y, svanirebbero egualmente i coefficienti di $F.y$, $\frac{dF.y}{dy}$, $\frac{d^2F.y}{dy^2}$, ec., che sarebbero quelli stessi di $e^{\beta y}$, $\frac{d.e^{\beta y}}{dy}$,

$\frac{d^2 e^{\beta y}}{dy^2}$, ec., e l'equazione riescirebbe identica. Pertanto alla proposta soddisfarà il valore

$$z_x = A^x F.y + xA^{x-1}B\frac{dF.y}{dy} + \frac{x(x-1)}{2}A^{x-2}B^2\frac{d^2F.y}{dy^2}\ldots + B^x\frac{d^xF.y}{dy^x},$$

che a motivo della funzione arbitraria $F.y$ ne sarà l'integrale completo.

Abbiamo espressa α per β; se invece prenderemo il valore di β in α, otterremo lo stesso integrale sotto una forma molto più semplice. Sarà infatti $\beta = \frac{\alpha - A}{B}$, e quindi

$z_x = a^x e^{\beta y} = a^x e^{\frac{\alpha - A}{B}y}$, il qual valore si può anche esprimer così, $z_x = B^x e^{-\frac{A}{B}y} \cdot \frac{d^x . e^{\frac{\alpha y}{B}}}{dy^x}$; e col medesimo raziocinio si proverà, che in luogo di $e^{\frac{\alpha y}{B}}$ si può mettere una funzione qualunque di y. Adunque il cercato integrale sarà

$$z_x = B^x e^{-\frac{A}{B}y} \cdot \frac{d^x f.y}{dy^x}.$$

Vedremo chiaramente, che questa seconda forma d'integrale è equivalente alla prima, se porremo $f.y = e^{\frac{A}{B}y} . F.y$, poichè sarà

$$\frac{d^x f.y}{dy^x} = \frac{d^x . e^{\frac{A}{B}y}}{dy^x} . F.y + x\frac{d^{x-1} . e^{\frac{A}{B}y}}{dy^{x-1}} \cdot \frac{dF.y}{dy} \ldots + e^{\frac{A}{B}y} \cdot \frac{d^xF.y}{dy^x},$$

o sia eseguite le differenziazioni di $e^{\frac{A}{B}y}$

$$\frac{d^x f.y}{dy^x} = e^{\frac{A}{B}y}\left(\frac{A^x}{B^x}F.y + x\frac{A^{x-1}}{B^{x-1}}.\frac{dF.y}{dy} + \frac{x(x-1)}{2}\frac{A^{x-2}}{B^{x-2}}.\frac{d^2F.y}{dy^2}\ldots + \frac{d^xF.y}{dy^x}\right),$$

e sostituito questo valore la seconda espressione di z_x si convertirà nella prima.

2.

Passiamo adesso alla equazione

$$z_{x+1} = Az_x + B\frac{dz_x}{dy} + C\frac{dz_{x+1}}{dy},$$

la quale contenendo di più il termine $C\frac{dz_{x+1}}{dy}$, ove la z varia e per rapporto ad x e per rapporto ad y, è del second'ordine. Ponendo $z_x = a^x e^{\beta y}$ avremo l'equazione $a = A + B\beta + Ca\beta$, dalla quale si ricava $a = \frac{A+B\beta}{1-C\beta}$. Se esprimessimo come sopra il valore di a^x per le potenze di β, a motivo del denominatore $1-C\beta$ avremmo una serie infinita; onde per ottenere l'integrale in termini finiti conviene in questo caso ricorrere ad altri artifizj. Facciamo $C\beta - 1 = C\gamma$, e sarà $\beta = \gamma + \frac{1}{C}$, ed

$a = \frac{A+B\gamma+\frac{B}{C}}{-C\gamma} = \frac{1}{-C}\left(\frac{K}{\gamma}+B\right)$, posto $K = A + \frac{B}{C}$. Pertanto

$a^x e^{\beta y} = \frac{1}{(-C)^x}\left(\frac{K}{\gamma}+B\right)^x . e^{\left(\gamma+\frac{1}{C}\right)y}$, e svolta in serie la quantità $\left(\frac{K}{\gamma}+B\right)^x$ sarà

$$a^x e^{\beta y} = \frac{1}{(-C)^x} e^{\left(\gamma+\frac{1}{C}\right)y}.\left(\frac{K^x}{\gamma^x} + x\frac{K^{x-1}B}{\gamma^{x-1}} + \frac{x(x-1)}{2}\frac{K^{x-2}B^2}{\gamma^{x-2}}\ldots + B^x\right),$$

la qual formola si può mettere sotto la forma

$$\frac{1}{(-C)^x} e^{\frac{y}{C}} \left(K^x \int^x dy^x . e^{\gamma y} + x K^{x-1} B \int^{x-1} dy^{x-1} . e^{\gamma y} \ldots + B^x e^{\gamma y} \right).$$

Quindi per le ragioni addotte di sopra ponendo una funzione arbitraria di y in luogo di $e^{\gamma y}$ avremo

$$z_x = \frac{e^{\frac{y}{C}}}{(-C)^x} \left(K^x \int^x dy^x F.y + x K^{x-1} B \int^{x-1} dy^{x-1} F.y \ldots + B^x F.y \right).$$

Sembra a prima vista che questo integrale non sia completo, perchè contiene la sola funzione arbitraria $F.y$, laddove la proposta essendo del second'ordine richiede due funzioni arbitrarie. Ma è da osservarsi che le integrazioni espresse dal segno $\int^x dy^x$, quando saranno completate, introdurranno una nuova funzione arbitraria di x. Infatti all'integrale $\int^n dy^n F.y$ conviene aggiungere la quantità

$$C^{(n)} + y C^{(n-1)} + \frac{y^2}{2} C^{(n-2)} + \frac{y^3}{2.3} C^{(n-3)} \ldots + \frac{y^{n-1}}{2.3 \ldots (n-1)} C^{(1)}$$

per renderlo completo; onde se n è variabile ed $= x$, $C^{(n)}$ diventerà una funzione arbitraria di x. Pertanto il segno integrale $\int^x dy^x F.y$ introdurrà la quantità

$$\phi.x + y\phi.(x-1) + \frac{y^2}{2} \phi.(x-2) + \frac{y^3}{2.3} \phi.(x-3) \ldots + \frac{y^{x-1}}{2.3 \ldots (x-1)} \phi.1 ;$$

similmente il segno $\int^{x-1} dy^{x-1} F.y$ porterà la quantità

$$\phi.(x-1) + y\phi.(x-2) + \frac{y^2}{2} \phi.(x-3) \ldots + \frac{y^{x-2}}{2.3 \ldots (x-2)} \phi.1$$

e così in seguito. Quindi l'integrale completo della proposta sarà

$$z_x = \frac{e^{\frac{y}{C}}}{(-C)^x} \left(K^x \int^x dy^x F.y + x K^{x-1} B \int^{x-1} dy^{x-1} F.y \ldots + B^x F.y \right)$$

$$+\frac{e^{\frac{y}{C}}K^x}{(-C)^x}\begin{cases}\phi.x+\left(y+\frac{B}{K}x\right)\phi.(x-1)+\left(\frac{y^2}{2}+\frac{B}{K}xy+\frac{B^2}{K^2}.\frac{x(x-1)}{2}\right)\phi.(x-2)\\ +\left(\frac{y^3}{2.3}+\frac{B}{K}.\frac{xy^2}{2}+\frac{B^2}{K^2}\frac{x(x-1)y}{2}+\frac{B^3}{K^3}\frac{x(x-1)(x-2)}{2.3}\right)\phi.(x-3)\\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\ +\left(\frac{y^{x-1}}{2.3\ldots(x-1)}+\frac{B}{K}\frac{xy^{x-2}}{2.3\ldots(x-2)}\ldots+\frac{B^{x-1}}{K^{x-1}}x\right)\phi.1\ .\end{cases}$$

La prima linea del valore di z_x si può rendere più concisa; se si pone sotto la forma

$$\frac{e^{\frac{y}{C}}}{(-C)^x}\int^x dy^x\left(K^xF.y+xK^{x-1}B\frac{dF}{dy}+\frac{x(x-1)}{2}K^{x-2}B^2\frac{d^2F}{dy^2}\ldots+B^x\frac{d^xF}{dy^x}\right).$$

Facciamo

$$Q_x=K^xF.y+xK^{x-1}B\frac{dF}{dy}+\frac{x(x-1)}{2}K^{x-2}B^2\frac{d^2F}{dy^2}\ldots+B^x\frac{d^xF}{dy^x}$$

ed avremo

$$Q_{x+1}=K^{x+1}F.y+(x+1)K^xB\frac{dF}{dy}+\frac{(x+1)x}{2}K^{x-1}B^2\frac{d^2F}{dy^2}\ldots+B^{x+1}\frac{d^{x+1}F}{dy^{x+1}}$$

$$\frac{dQ_x}{dy}=K^x\frac{dF}{dy}+xK^{x-1}B\frac{d^2F}{dy^2}+\frac{x(x-1)}{2}K^{x-2}B^2\frac{d^3F}{dy^3}\ldots+B^x\frac{d^{x+1}F}{dy^{x+1}}.$$

Quindi apparisce, che sarà

$$Q_{x+1}=KQ_x+B\frac{dQ_x}{dy}$$

la qual' equazione ci dà (1)

$$Q_x=B^xe^{-\frac{K}{B}y}.\frac{d^xf.y}{dy^x}.$$

Per conseguenza in luogo della prima linea del valore trovato di z_x si potrà sostituire la quantità

$$e^{\frac{y}{C}}\left(-\frac{B}{C}\right)^x\int^x dy^x\left(e^{-\frac{K}{B}y}.\frac{d^xf.y}{dy^x}\right).$$

Se $K=0$, cioè $B=-AC$, ponendo $\phi.x=\frac{\Psi.x}{K^x}$ avremo

$$z_x=e^{\frac{y}{C}}.A^x f.y$$

$$+\frac{e^{\frac{y}{C}}}{(-C)^x}\left(\Psi.x+Bx\Psi.(x-1)+B^2\frac{x(x-1)}{2}\Psi.(x-2)\ldots+B^x\Psi.1\right)$$

o sia più semplicemente

$$z_x=A^x f.y+e^{\frac{y}{C}}\Psi.x.$$

A questo integrale giungeremo subito, se osserviamo che l'equazione $a=A+B\beta+Ca\beta$ nel caso di $K=0$ diventa della forma $(a-A)(1-C\beta)=0$ onde si deduce o $a=A$ e β qualunque, o $\beta=\frac{1}{C}$ ed a qualunque; e quindi le quantità $A^x e^{\beta y}$, ed $e^{\frac{y}{C}}.a^x$ poste in luogo di z_x soddisfanno alla proposta. Ma invece di $e^{\beta y}$ possiamo porre una funzione qualunque di y, e così pure una funzione qualunque di x in luogo di a^x; poichè il valore $e^{\frac{y}{C}}.a^x$ sostituito nella proposta in luogo di z_x la renderà identica, e perciò posti tutti i termini da una parte e dall'altra zero, si annulleranno dopo questa sostituzione i coefficienti di a^x e di a^{x+1} a motivo di a qualunque. Ora se invece di a^x prendiamo $\Psi.x$, e sostituiamo $e^{\frac{y}{C}}.\Psi.x$ in luogo di z_x, saranno i coefficienti di $\Psi.x$ e $\Psi.(x+1)$ quei medesimi che prima erano di a^x ed a^{x+1}, cioè eguali a zero. Pertanto soddisfaranno alla proposta i due valori $A^x f.y$, ed $e^{\frac{y}{C}}.\Psi.x$ di z_x, e siccome essa è lineare, soddisfarà ancora

$z_x = A^x f.y + e^{\frac{y}{C}}.\Psi.x$, e ne sarà l'integrale completo, perchè comprende le due funzioni arbitrarie $f.y$ e $\Psi.x$.

3.

L'equazioni degli ordini superiori si potranno facilmente integrare, se, dopo di avervi sostituito $a^x e^{\beta y}$ in luogo di z_x, l'equazione che ne nasce tra a e β sarà risolubile in fattori della forma $a - p - q\beta = 0$, o pure $a - p - q\beta - ra\beta = 0$. Ciascuno di questi fattori ci darà un valore particolare di z_x, e la somma di tutti l'integrale completo della proposta. A render ciò evidente consideriamo l'equazione del second'ordine

$$z_{x+2} + Az_{x+1} + Bz_x + C\frac{dz_x}{dy} + D\frac{dz_{x+1}}{dy} + E\frac{d^2 z_x}{dy^2} = 0,$$

la quale posto $z_x = a^x e^{\beta y}$ ci dà tra a e β l'equazione

$$a^2 + Aa + B + C\beta + Da\beta + E\beta^2 = 0.$$

Se il primo membro di questa equazione è risolubile ne'due fattori $a - p - q\beta$, $a - p' - q'\beta$, è chiaro che ad essa si potrà dare la forma seguente

$$a^2 - pa - qa\beta - p'(a - p - q\beta) - q'(a\beta - p\beta - q\beta^2) = 0.$$

Quindi la proposta sarà della forma

$$z_{x+2} - pz_{x+1} - q\frac{dz_{x+1}}{dy} - p'\left(z_{x+1} - pz_x - q\frac{dz_x}{dy}\right)$$
$$- q'\left(\frac{dz_{x+1}}{dy} - p\frac{dz_x}{dy} - q\frac{d^2 z_x}{dy^2}\right) = 0,$$

ed è evidente che ad essa soddisfarà l'equazione

$$z_{x+1} - pz_x - q\frac{dz_x}{dy} = 0,$$

cioè integrando (1)

$$z_x = q^x e^{-\frac{p}{q}y} \cdot \frac{d^x F.y}{dy^x}.$$

Nella stessa maniera si proverà, che alla proposta soddisfà l'equazione

$$z_{x+1}-p'z_x-q'\frac{dz_x}{dy}=0$$

dalla quale similmente si deduce

$$z_x=q'^x e^{-\frac{p'}{q'}y}\cdot\frac{d^xF.y}{dy^x}.$$

Onde, siccome la proposta è lineare, l'integrale completo della medesima sarà

$$z_x=q^x e^{-\frac{p}{q}y}\cdot\frac{d^xF.y}{dy^x}+q'^x e^{-\frac{p'}{q'}y}\cdot\frac{d^xF'.y}{dy^x},$$

ove $F.y$, e $F'.y$ sono due diverse funzioni arbitrarie di y. È facile il vedere, che il medesimo discorso si applica a qualunque altra equazione di una simile forma.

4.

Se l'equazione in α e β non è risolubile in fattori razionali, con i metodi conosciuti potremo esprimere la quantità α^x in una serie ascendente ordinata per le potenze di β di questa forma

$$\alpha^x=M\beta^{mx}+M'\beta^{mx+m'}+M''\beta^{mx+m''}+\text{ec.}$$

e col medesimo raziocinio usato di sopra ne dedurremo il valore particolare di z^x, cioè

$$z_x=M\frac{d^{mx}.F.y}{dy^{mx}}+M'\frac{d^{mx+m'}.F.y}{dy^{mx+m'}}+M''\frac{d^{mx+m''}.F.y}{dy^{mx+m''}}+\text{ec.}$$

Ma siccome abbiamo tante serie per esprimere α^x, quanto è il grado dell'equazione in α e β, o sia quanto è l'ordine della equazione proposta tra z_x e le sue differenze, otterremo altrettanti valori particolari di z_x, e la somma di tutti ci darà l'integrale completo della proposta.

Se per le condizioni del problema le funzioni arbitrarie $F.y$, ec. fossero funzioni intere, le serie in tal caso si terminerebbero, ed avremmo l'integrale espresso in un numero finito di termini. Eccettuato questo caso l'integrale ottenuto in tal

modo sarà composto d'infiniti termini, e per averlo sotto una forma finita converrà ricorrere ad un altro metodo, che adesso sono per esporre.

5.

Sia dunque proposta l'equazione generale del second'ordine

$$z_{x+2}=Az_{x+1}+Bz_x+C\frac{dz_{x+1}}{dy}+D\frac{dz_x}{dy}+E\frac{d^2z_x}{dy^2},$$

ove i coefficienti A, B, ec. siano costanti. Se ponghiamo $z_1=F.y$, e $z_0=F'.y$, facendo $x=0$ avremo

$$z_2=AF.y+C\frac{dF}{dy}+BF'.y+D\frac{dF'}{dy}+E\frac{d^2F'}{dy^2}.$$

Similmente ponendo $x=1$ otterremo

$$z_3=Az_2+BF.y+C\frac{dz_2}{dy}+D\frac{dF}{dy}+E\frac{d^2F}{dy^2},$$

e sostituendovi il valore di z_2 avremo quello di z_3 della forma seguente

$$z_3=aF.y+a'\frac{dF}{dy}+a''\frac{d^2F}{dy^2}+bF'.y+b'\frac{dF'}{dy}+b''\frac{d^2F'}{dy^2}+b'''\frac{d^3F'}{dy^3}.$$

Continuando ad operare nella medesima maniera troveremo il valore di z_x così espresso;

$$z_x=a_{0,x}F.y+a_{1,x}\frac{dF}{dy}+a_{2,x}\frac{d^2F}{dy^2}\ldots+a_{x-1,x}\cdot\frac{d^{x-1}F}{dy^{x-1}}$$

$$+b_{0,x}F'.y+b_{1,x}\frac{dF'}{dy}+b_{2,x}\frac{d^2F'}{dy^2}\ldots+b_{x,x}\cdot\frac{d^xF'}{dy^x}$$

che sarà l'integrale completo della proposta.

Rimane a trovarsi il valore dei coefficienti $a_{0,x}$, $b_{0,x}$, ec.; al quale oggetto ponghiamo $z_x=a^xe^{\beta y}$, ed avremo $F.y=z_1=ae^{\beta y}$, $F'.y=z_0=e^{\beta y}$, e sostituiti questi valori l'equazione precedente si cangerà in

$$(a)\quad a^x = a_{0,x} + a_{1,x}.a\beta + a_{2,x}.a\beta^2 \ldots + a_{x-1,x}.a\beta^{x-1}$$
$$+ b_{0,x} + b_{1,x}.\beta + b_{2,x}.\beta^2 \ldots + b_{x,x}.\beta^x$$

e tra a e β avrà luogo l'equazione

$$(b)\quad a^2 = Aa + B + C a\beta + D\beta + E\beta^2 .$$

Quindi apparisce, che l'equazione (a) si otterrà, se nella quantità a^x si porrà finchè si può il valore di a^2 ricavato dalla equazione (b), e nella quantità, che ne risulta, si sostituirà finche è possibile il medesimo valore di a^2, e così in seguito. Ciò posto nella equazione (a) mettiamo $x+1$ in luogo di x, ed avremo

$$(c)\quad a^{x+1} = a_{0,x+1}.a + a_{1,x+1}.a\beta + a_{2,x+1}.a\beta^2 \ldots + a_{x,x+1}.a\beta^x$$
$$+ b_{0,x+1} + b_{1,x+1}.\beta + b_{2,x+1}.\beta^2 \ldots + b_{x+1,x+1}.\beta^{x+1}.$$

Ma il valore di a^{x+1} si può ottenere in altra maniera, se quello di a^x si moltiplica per a, e fatto ciò si trova

$$a^{x+1} = a_{0,x}.a^2 + a_{1,x}.a^2\beta + a_{2,x}.a^2\beta^2 \ldots + a_{x-1,x}.a^2\beta^{x-1}$$
$$+ b_{0,x}.a + b_{1,x}.a\beta + b_{2,x}.a\beta^2 \ldots + b_{x,x}.a\beta^x .$$

Se nel secondo membro di questa equazione si sostituisce il valore di a^2 preso dalla equazione (b), si avrà

$$(d)\quad a^{x+1} = (A + C\beta)(a_{0,x}.a + a_{1,x}.a\beta + a_{2,x}.a\beta^2 + \text{ec.})$$
$$+ (B + D\beta + E\beta^2)(a_{0,x} + a_{1,x}.\beta + a_{2,x}.\beta^2 + \text{ec.})$$
$$+ b_{0,x}.a + b_{1,x}.a\beta + b_{2,x}.a\beta^2 + b_{3,x}.a\beta^3 + \text{ec.}$$

Ora, siccome le due equazioni (c) e (d) devono essere identiche, se paragoniamo i coefficienti di a, $a\beta$, $a\beta^2$, ec., avremo

$$a_{0,x+1} = Aa_{0,x} + b_{0,x}$$
$$a_{1,x+1} = Aa_{1,x} + Ca_{0,x} + b_{1,x}$$

e generalmente

$$(e)\quad a_{n,x+1} = Aa_{n,x} + Ca_{n-1,x} + b_{n,x}$$

per mezzo della qual'equazione otterremo il valore di $b_{n,x}$ subito che conosceremo quello di $a_{n,x}$.

Se paragoniamo ancora i coefficienti di β^0 , β , β^2 , ec. troveremo

$$b_{0,x+1}=Ba_{0,x}$$
$$b_{1,x+1}=Ba_{1,x}+Da_{0,x}$$
$$b_{2,x+1}=Ba_{2,x}+Da_{1,x}+Ea_{0,x}$$

e generalmente

$$b_{n,x+1}=Ba_{n,x}+Da_{n-1,x}+Ea_{n-2,x}.$$

Ponghiamo in quest'equazioni il valore di $b_{n,x}$ ricavato dalla equazione (e), ed avremo

$$a_{0,x+2}=Aa_{0,x+1}+Ba_{0,x}$$
$$a_{1,x+2}=Aa_{1,x+1}+Ba_{1,x}+Ca_{0,x+1}+Da_{0,x}$$
$$(f)\quad a_{n,x+2}=Aa_{n,x+1}+Ba_{n,x}+Ca_{n-1,x+1}+Da_{n-1,x}+Ea_{n-2,x}$$

le quali tre equazioni sono tutte comprese nella terza, come apparisce dall'osservare che $a_{n,x}$ è zero, quando n è un numero negativo.

Pertanto l'integrazione della proposta equazione a differenze finite e infinitesime è ridotta alla integrazione della equazione (f) a differenze puramente finite, alla quale si potranno applicare i metodi conosciuti. Le funzioni arbitrarie $a_{n,0}$, $a_{n,1}$, che porterà l'integrazione dell'equazione (f) sono tali nel caso nostro, che $a_{n,0}$ è sempre $=0$ qualunque sia n, ed $a_{n,1}$ è sempre $=0$ eccettuato il solo caso di $n=0$, nel quale è $=1$; le funzioni $a_{0,x}$, $a_{1,x}$ son date dall'equazioni

$$a_{0,x+2}=Aa_{0,x+1}+Ba_{0,x}$$
$$a_{1,x+2}=Aa_{1,x+1}+Ba_{1,x}+Ca_{0,x+1}+Da_{0,x}$$

Del resto per trovare i coefficienti $a_{0,x}$, $b_{0,x}$, ec. si possono usare altri metodi, e a quest'oggetto si consulti una eccellente Memoria del sommo Geometra *Lagrange* sulla integrazione dell'equazioni a differenze finite inserita tra quelle dell'Accademia di Berlino dell'anno 1775. Solo si osservi che questi metodi, dei quali si trova un piccolo saggio al n.° 186. del Tomo II.,

possono alquanto semplicizzarsi per la riflessione, che abbiamo fatta di sopra, cioè che il valore di $b_{n,x}$ è noto in generale, subito che si conosce quello di $a_{n,x}$. Ma noi non ci tratterremo per ora sopra di ciò, perchè abbiamo ottenuto l' intento, quando abbiamo fatta dipendere la soluzione del nuovo problema propostoci da quella di un altro problema, che è già stato dai Geometri risoluto.

6.

Il metodo precedente non può adoprarsi, quando nella proposta manca il termine z_{x+2}. Per trovare l'integrale in tal caso mettiamo l'equazione data sotto la forma

$$z_{x+1}+A\frac{dz_{x+1}}{dy}=Bz_x+C\frac{dz_x}{dy}+D\frac{d^2z_x}{dy^2},$$

e facciamo $z_x=e^{my}.z'_x$, essendo m una quantità costante. Sostituito questo valore la proposta diventerà

$$(1+Am)z'_{x+1}+A\frac{dz'_{x+1}}{dy}=(B+Cm+Dm^2)z'_x+(C+2Dm)\frac{dz'_x}{dy}+D\frac{d^2z'_x}{dy^2}.$$

Ora potremo togliere il primo termine con fare $1+Am=0$, cioè $m=-\frac{1}{A}$, ed avremo

$$\frac{dz'_{x+1}}{dy}=B'z'_x+C'\frac{dz'_x}{dy}+D'\frac{d^2z'_x}{dy^2}$$

ove sarà $B'=\frac{B}{A}-\frac{C}{A^2}+\frac{D}{A^3}$, $C'=\frac{C}{A}-\frac{2D}{A^2}$, $D'=\frac{D}{A}$. Ponghiamo $z'_x=\int^x dy^x z''_x$, ed otterremo

$$z''_{x+1}=B'z''_x+C'\frac{dz''_x}{dy}+D'\frac{d^2z''_x}{dy^2}.$$

Per integrare questa equazione facciamo $z''_x=a^x e^{\beta y}$, ed avre-

mo $a=B'+C'\beta+D'\beta^2$, e quindi $a^x=(B'+C'\beta+D'\beta^2)^x$, la qual quantità svolta secondo le potenze di β ci darà una formola della forma seguente

$$a^x=a_{0,x}+a_{1,x}.\beta+a_{2,x}.\beta^2\ldots+a_{2x,x}.\beta^{2x}.$$

Di quì usando i precedenti ragionamenti dedurremo il valore di z''_x così espresso;

$$z''_x=a_{0,x}.F.y+a_{1,x}.\frac{dF}{dy}+a_{2,x}.\frac{d^2F}{dy^2}\ldots+a_{2x,x}.\frac{d^{2x}F}{dy^{2x}}.$$

Ora essendo $z'_x=\int^x dy^x.z''_x$, sarà

$$z'_x=a_{0,x}\int^x dy^x.F.y+a_{1,x}\int^{x-1}dy^{x-1}.F.y\ldots+a_{x-1,x}\int dyF.y$$
$$+a_{x,x}.F.y+a_{x+1,x}.\frac{dF}{dy}+a_{x+2,x}.\frac{d^2F}{dy^2}\ldots+a_{2x,x}.\frac{d^xF}{dy^x}$$
$$+a_{0,x}.fx+\left(ya_{0,x}+a_{1,x}\right)f.(x-1)+\left(\frac{y^2}{2}a_{0,x}+ya_{1,x}+a_{2,x}\right)f.(x-2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\left(\frac{y^{x-1}}{2.3\ldots(x-1)}a_{0,x}+\frac{y^{x-2}}{2.3\ldots(x-2)}a_{1,x}\ldots\ldots+a_{x-1,x}\right)f.1$$

e se questo valore si moltiplicherà per $e^{my}=e^{-\frac{y}{A}}$, si otterrà l'integrale completo della proposta, perchè contiene le due funzioni arbitrarie $F.y$ e $f.x$.

Nel caso di $A=0$ il valore di z_x si troverà di una forma simile a quella di z''_x, e siccome non comprenderà che una funzione arbitraria, sarà un integrale particolare. Nè si vede, come in tal caso possa esprimersi in termini finiti l'integrale completo della proposta.

7.

Passiamo all'equazione del terz'ordine

$$z_{x+3}=Az_{x+2}+B\frac{dz_{x+2}}{dy}+Cz_{x+1}+D\frac{dz_{x+1}}{dy}$$
$$+E\frac{d^2z_{x+1}}{dy^2}+Fz_x+G\frac{dz_x}{dy}+H\frac{d^2z_x}{dy^2}+I\frac{d^3z_x}{dy^3}.$$

Se poniamo $z_x=a^x e^{\beta y}$, avremo tra a e β l'equazione

$$(a)\quad a^3=Aa^2+Ba^2\beta+Ca+Da\beta+Ea\beta^2+F+G\beta+H\beta^2+I\beta^3.$$

Sostituendo nella quantità a^x, finchè si può, il valore di a^3 ricavato dalla equazione (a), e nella quantità che ne risulta ponendo, finchè è possibile, il medesimo valore di a^3, e così in seguito, giungeremo a sviluppare il valore di a^x in una formola della forma

$$a^x=a_{0,x}.a^2+a_{1,x}.a^2\beta+a_{2,x}.a^2\beta^2\ldots+a_{x-2,x}.a^2\beta^{x-2}$$
$$+b_{0,x}.a+b_{1,x}.a\beta+b_{2,x}.a\beta^2\ldots+b_{x-1,x}.a\beta^{x-1}$$
$$+c_{0,x}+c_{1,x}.\beta+c_{2,x}.\beta^2\ldots+c_{x,x}.\beta^x,$$

e col ragionamento usato di sopra dimostreremo l'integrale completo della proposta essere

$$z_x=a_{0,x}.F.y+a_{1,x}.\frac{dF.y}{dy}+a_{2,x}.\frac{d^2F.y}{dy^2}\ldots+a_{x-2,x}.\frac{d^{x-2}F.y}{dy^{x-2}}$$
$$+b_{0,x}.F'.y+b_{1,x}.\frac{dF'.y}{dy}+b_{2,x}.\frac{d^2F'.y}{dy^2}\ldots+b_{x-1,x}.\frac{d^{x-1}.F'.y}{dy^{x-1}}$$
$$+c_{0,x}.F''.y+c_{1,x}.\frac{dF''.y}{dy}+c_{2,x}.\frac{d^2F''.y}{dy^2}\ldots+c_{x,x}.\frac{d^xF''.y}{dy^x},$$

ove $F.y$, $F'.y$, $F''.y$ sono tre funzioni arbitrarie di y, cioè $F.y=z_2$, $F'.y=z_1$, $F''.y=z_0$.

Per determinare i coefficienti $a_{n,x}$, $b_{n,x}$, $c_{n,x}$, nel valore di a^x ponghiamo $x+1$ in luogo di x, ed avremo

$$a^{x+1}=a_{0,x+1}.\alpha^2+a_{1,x+1}.\alpha^2\beta+a_{2,x+1}.\alpha^2\beta^2+a_{3,x+1}.\alpha^2\beta^3+\text{ec.}$$
$$+b_{0,x+1}.\alpha+b_{1,x+1}.\alpha\beta+b_{2,x+1}.\alpha\beta^2+b_{3,x+1}.\alpha\beta^3+\text{ec.}$$
$$+c_{0,x+1}+c_{1,x+1}.\beta+c_{2,x+1}.\beta^2+c_{3,x+1}.\beta^3+\text{ec.}$$

Ma in altra forma ancora otterremo a^{x+1}, se moltiplicheremo a^x per a, e poi in luogo di a^2 vi porremo il suo valore dedotto dalla equazione (a); e fatto ciò avremo

$$a^{x+1}=(A+B\beta)(a_{0,x}.\alpha^2+a_{1,x}.\alpha^2\beta+a_{2,x}.\alpha^2\beta^2+\text{ec.})$$
$$+(C+D\beta+E\beta^2)(a_{0,x}.\alpha+a_{1,x}.\alpha\beta+a_{2,x}.\alpha\beta^2+\text{ec.})$$
$$+(F+G\beta+H\beta^2+I\beta^3)(a_{0,x}+a_{1,x}.\beta+a_{2,x}.\beta^2+\text{ec.})$$
$$+b_{0,x}.\alpha^2+b_{1,x}.\alpha^2\beta+b_{2,x}.\alpha^2\beta^2+b_{3,x}.\alpha^2\beta^3+\text{ec.}$$
$$+c_{0,x}.\alpha+c_{1,x}.\alpha\beta+c_{2,x}.\alpha\beta^2+c_{3,x}.\alpha\beta^3+\text{ec.}$$

Se adesso in questi due valori di a^{x+1}, i quali devono essere identici, si paragonano i coefficienti di α^2, $\alpha^2\beta$, $\alpha^2\beta^2$, ec., si troverà

$$a_{0,x+1}=Aa_{0,x}+b_{0,x}$$
$$a_{1,x+1}=Aa_{1,x}+Ba_{0,x}+b_{1,x}$$

e generalmente

$$a_{n,x+1}=Aa_{n,x}+Ba_{n-1,x}+b_{n,x},$$

per mezzo della qual'equazione conosciuto $a_{n,x}$ si avrà subito $b_{n,x}$.

Paragonando nelle medesime formole i coefficienti α, $\alpha\beta$, $\alpha\beta^2$, ec. avremo

$$b_{0,x+1}=Ca_{0,x}+c_{0,x}$$
$$b_{1,x+1}=Ca_{1,x}+Da_{0,x}+c_{1,x}$$
$$b_{2,x+1}=Ca_{2,x}+Da_{1,x}+Ea_{0,x}+c_{2,x}$$

ed in generale

$$b_{n,\,x+1}=Ca_{n,\,x}+Da_{n-1,\,x}+Ea_{n-2,\,x}+c_{n,\,x}$$

nella qual'equazione se sostituiamo il valore di $b_{n,\,x}$ trovato di sopra avremo

$$c_{n,\,x}=a_{n,\,x+2}-Aa_{n,\,x+1}-Ba_{n-1,\,x+1}-Ca_{n,\,x}-Da_{n-1,\,x}-Ea_{n-2,\,x}$$

e quindi conosciuto $a_{n,\,x}$ si avrà anche $c_{n,\,x}$.

Paragoniamo finalmente i coefficienti di β^0, β, β^2, ec., e troveremo

$$c_{0,\,x+1}=Fa_{0,\,x}$$
$$c_{1,\,x+1}=Fa_{1,\,x}+Ga_{0,\,x}$$
$$c_{2,\,x+1}=Fa_{2,\,x}+Ga_{1,\,x}+Ha_{0,\,x}$$
$$c_{3,\,x+1}=Fa_{3,\,x}+Ga_{2,\,x}+Ha_{1,\,x}+Ia_{0,\,x}$$

e generalmente

$$c_{n,\,x+1}=Fa_{n,\,x}+Ga_{n-1,\,x}+Ha_{n-2,\,x}+Ia_{n-3,\,x}.$$

Si sostituisca in quest'equazioni il valore di $c_{n,\,x+1}$, ed avrassi

(*b*) $a_{0,x+3}=Aa_{0,x+2}+Ca_{0,x+1}+Fa_{0,\,x}$

(*c*) $a_{1,x+3}=Aa_{1,x+2}+Ba_{0,x+2}+Ca_{1,x+1}+Da_{0,x+1}+Fa_{1,x}+Ga_{0,x}$

(*d*) $a_{2,x+3}=Aa_{2,x+2}+Ba_{1,x+2}+Ca_{2,x+1}+Da_{1,x+1}+Fa_{2,x}+Ga_{1,x}+Ha_{0,x}$

(*e*) $a_{n,x+3}=A_{n,x+2}+Ba_{n-1,x+2}+Ca_{n,x+1}+Da_{n-1,x+1}+Fa_{n,x}+Ga_{n-1,x}+Ha_{n-2,x}+Ia_{n-3,x}$

le quali equazioni sono tutte comprese nella (*e*), giacchè $a_{n,\,x}$ è $=0$ quando n è negativa.

La ricerca pertanto di $a_{n,\,x}$ dipende dalla integrazione dell'equazione (*e*) a differenze finite. E quì si osservi, che le funzioni arbitrarie $a_{n,\,0}$, $a_{n,\,1}$, $a_{n,\,2}$, le quali porterà questa integrazione sono date in modo, che $a_{n,\,0}$ ed $a_{n,\,1}$ so-

no sempre eguali a zero; $a_{n\cdot,2}$ è $=1$ nel solo caso di $n=0$, negli altri è sempre $=0$. Le funzioni $a_{0,x}, a_{1,x}, a_{2,x}$ sono date dall'equazioni (b), (c), (d), le quali essendo a differenze finite tra due sole variabili non presentano alcuna difficoltà per la loro integrazione. Ad oggetto di conoscere altri metodi per determinare $a_{n,x}$ si consulti la lodata Memoria di *Lagrange*.

8.

Se manca il termine z_{x+3}, l'equazione precedente potrà mettersi sotto la forma

$$z_{x+2}+A\frac{dz_{x+2}}{dy}=Bz_{x+1}+C\frac{dz_{x+1}}{dy}+D\frac{d^2z_{x+1}}{dy^2}+Ez_x+F\frac{dz_x}{dy}+G\frac{d^2z_x}{dy^2}+H\frac{d^3z_x}{dy^3}.$$

Ponghiamo $z_x=e^{-\frac{y}{A}}.z'_x$, ed avremo

$$\frac{dz'_{x+2}}{dy}=B'z'_{x+1}+C'\frac{dz'_{x+1}}{dy}+D'\frac{d^2z'_{x+1}}{dy^2}+E'z'_x+F'\frac{dz'_x}{dy}+G'\frac{d^2z'_x}{dy^2}+H'\frac{d^3z'_x}{dy^3},$$

ove $B'=\frac{B}{A}-\frac{C}{A^2}+\frac{D}{A^3}$, $C'=\frac{C}{A}-\frac{2D}{A^2}$, $D'=\frac{D}{A}$,

$E'=\frac{E}{A}-\frac{F}{A^2}+\frac{G}{A^3}-\frac{H}{A^4}$, $F'=\frac{F}{A}-\frac{2G}{A^2}+\frac{3H}{A^3}$,

$G'=\frac{G}{A}-\frac{3H}{A^2}$, $H'=\frac{H}{A}$.

Se adesso facciamo $z'_x=a^xe^{\beta y}$, avremo tra a e β l'equazione

$$a^2\beta=B'a+C'a\beta+D'a\beta^2+E'+F'\beta+G'\beta^2+H'\beta^3.$$

Mediante questa equazione se svolgeremo le quantità a^x in una formola della forma

$$\alpha^x = \frac{a_{0,x}.\alpha}{\beta^{x-1}} + \frac{a_{1,x}.\alpha}{\beta^{x-2}} \ldots + a_{x-1,x}.\alpha + a_{x,x}.\alpha\beta \ldots + a_{2x-2,x}.\alpha\beta^{x-1}$$

$$+ \frac{b_{0,x}}{\beta^{x-1}} + \frac{b_{1,x}}{\beta^{x-2}} \ldots + b_{x-1,x} + b_{x,x}.\beta + b_{x+1,x}.\beta^2 \ldots + b_{2x-1,x}.\beta^x ,$$

otterremo l'integrale della proposta così espresso

$$z'_x = a_{0,x} \int^{x-1} dy^{x-1} F.y + a_{1,x} \int^{x-2} dy^{x-2} F.y \ldots + a_{x-2,x} \int dy\, F.y$$

$$+ a_{x-1,x} F.y + a_{x,x} \frac{dF}{dy} + a_{x+1,x} \frac{d^2F}{dy^2} \ldots + a_{2x-2,x} \frac{d^{x-1}F}{dy^{x-1}}$$

$$+ b_{0,x} \int^{x-1} dy^{x-1} F'.y + b_{1,x} \int^{x-2} dy^{x-2} F'.y \ldots + b_{x-2,x} \int dy\, F'.y$$

$$+ b_{x-1,x} F'.y + b_{x,x} \frac{dF'}{dy} + b_{x+1,x} \frac{d^2F'}{dy^2} \ldots + b_{2x-1,x} \frac{d^xF'}{dy^x}$$

ove si determineranno i coefficienti $a_{n,x}$ e $b_{n,x}$ col metodo esposto di sopra.

Questo integrale non sembra completo, perchè contiene due sole funzioni arbitrarie $F.y$ ed $F'.y$; ma è da notarsi che i segni integrali introdurranno un'altra funzione arbitraria di x, e si dovrà aggiungere al valore precedente di z'_x la formola seguente

$$\frac{y^{x-2}}{2.3\ldots(x-2)} f_{1,x} + \frac{y^{x-3}}{2.3.\ldots(x-3)} f_{2,x} \ldots + y f_{x-2,x} + f_{x-1,x} .$$

Delle funzioni $f_{1,x}, f_{2,x}$, ec. una sola dev'essere arbitraria, e per determinare le altre si sostituirà nella equazione data la formola antecedente in luogo di z'_x, e dal paragone dei diversi termini si dedurrà la relazione, che deve aver luogo tra le medesime funzioni.

9.

Per illustrare con un esempio le diverse operazioni, che richiede il metodo esposto nel num.° antecedente, prendiamo a considerare l'equazione

$$z_{x+2}+A\frac{dz_{x+2}}{dy}=Bz_{x+1}+Ez_x$$

la quale posto $z_x=e^{-\frac{y}{A}}.x'_x$, e $B'=\frac{B}{A}$, $E'=\frac{E}{A}$ si cangia nella seguente

$$\frac{dz'_{x+2}}{dy}=B'z'_{x+1}+E'z'_x .$$

Se facciamo $z'_x=a^x e^{\beta y}$, avremo tra a e β l' equazione

$$a^2=\frac{B'a}{\beta}+\frac{E'}{\beta},$$

mediante la quale svolgeremo la quantità a^x in una formola della forma seguente

$$a^x=\frac{a_{0,x}.a}{\beta^{x-1}}+\frac{a_{1,x}.a}{\beta^{x-2}}+\frac{a_{2,x}.a}{\beta^{x-3}}+\text{ec.}$$
$$+\frac{b_{0,x}}{\beta^{x-1}}+\frac{b_{1,x}}{\beta^{x-2}}+\frac{b_{2,x}}{\beta^{x-3}}+\text{ec.}$$

Ponghiamo in questa formola $x+1$ in luogo di x, ed avremo

$$a^{x+1}=\frac{a_{0,x+1}.a}{\beta^x}+\frac{a_{1,x+1}.a}{\beta^{x-1}}+\frac{a_{2,x+1}.a}{\beta^{x-2}}+\text{ec.}$$
$$+\frac{b_{0,x+1}}{\beta^x}+\frac{b_{1,x+1}}{\beta^{x-1}}+\frac{b_{2,x+1}}{\beta^{x-2}}+\text{ec.}$$

Per ottenere un altro valore di a^{x+1} moltiplichiamo quello di a^x per a, e sarà

$$a^{x+1}=\frac{a_{0,x}.a^2}{\beta^{x-1}}+\frac{a_{1,x}.a^2}{\beta^{x-2}}+\frac{a_{2,x}.a^2}{\beta^{x-3}}+\text{ec.}$$
$$+\frac{b_{0,x}.a}{\beta^{x-1}}+\frac{b_{1,x}.a}{\beta^{x-2}}+\frac{b_{2,x}.a}{\beta^{x-3}}+\text{ec.}$$

e se in luogo di a^2 si sostituisce il suo valore $\frac{B'a}{\beta}+\frac{E'}{\beta}$, avrassi

$$a^{x+1}=\frac{B'a_{0,x}.a}{\beta^x}+\frac{B'a_{1,x}.a}{\beta^{x-1}}+\frac{B'a_{2,x}.a}{\beta^{x-2}}+\text{ec.}$$
$$+\frac{E'a_{0,x}}{\beta^x}+\frac{E'a_{1,x}}{\beta^{x-1}}+\frac{E'a_{2,x}}{\beta^{x-2}}+\text{ec.}$$
$$+\frac{b_{0,x}.a}{\beta^{x-1}}+\frac{b_{1,x}.a}{\beta^{x-2}}+\text{ec.}$$

Questo valore di a^{x+1} dovendo essere identico col primo trovato, avremo dal paragone dei termini simili

$$b_{n,x+1}=E'a_{n,x}$$

cioè conosciuto $a_{n,x}$ sarà $b_{n,x}=E'a_{n,x-1}$. Sarà inoltre

$$a_{0,x+1}=B'a_{0,x}$$
$$a_{n,x+1}=B'a_{n,x}+b_{n-1,x}$$

e sostituendo il valore di $b_{n-1,x}$

$$a_{n,x+1}=B'a_{n,x}+E'a_{n-1,x-1}.$$

Per integrare questa equazione a differenze parziali e finite non vi è bisogno di ricorrere ai conosciuti metodi generali, perchè la di lei forma ci permette di giungere assai facilmente all'integrale nel modo seguente. Ma prima si osservi la funzione $a_{n,x}$ esser tale, che $a_{1,2}=0$, $a_{2,3}=0$, $a_{3,4}=0$, e generalmente $a_{n,n+1}=0$ eccettuato il caso soltanto di $n=0$, in cui è $=1$: di che ci persuaderemo facilmente dopo una breve riflessione sul modo, con cui dalla equazione $a^2=\frac{B'a}{\beta}+\frac{E'}{\beta}$ si deduce il valore di a^x. Ciò posto facciamo $a_{n,x}=B'^x.c_{n,x}$ e sarà

$$c_{0,x+1}=c_{0,x}$$
$$c_{n,x+1}=c_{n,x}+\frac{E'}{B'^2}c_{n-1,x-1}$$

Da questa ultima equazione si deduce $c_{n,x}=\frac{E'}{B'^2}\Sigma c_{n-1,x-1}$, ove il segno integrale Σ si riferisce alla variabile x, e sostituendo nel secondo membro il valore di $c_{n-1,x-1}$ dedotto dalla medesima equazione, cioè $\frac{E'}{B'^2}\Sigma c_{n-2,x-2}$, e così in seguito giungeremo ad avere $c_{n,x}=\frac{E'^n}{B'^{2n}}\Sigma^n.c_{0,x-n}$, cioè

$c_{n,x+n}=\frac{E'^n}{B'^{2n}}\Sigma^n.c_{0,x}$, e posto $x+1$ in luogo di x,

$c_{n,x+n+1}=\frac{E'^n}{B'^{2n}}\Sigma^n.c_{0,x+1}$; onde si ricava

$c_{n,x+n}=\frac{E'^n}{B'^{2n}}\Sigma^{n+1}.(c_{0,x+1}-c_{0,x})$. Ma poichè

$c_{0,x+1}-c_{0,x}=0$, avremo $c_{n,x+n}=\frac{E'^n}{B'^{2n}}\Sigma^{n+1}.0$, o sia

$$c_{n,x+n}=\frac{E'^n}{B'^{2n}}\left(\phi.(n+1)+(x-1)\phi.n+\frac{(x-1)(x-2)}{2}\phi.(n-1)\ldots+\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{2.3\ldots n}\phi.1\right).$$

Sarà pertanto, posto $x-n$ in luogo di x, ed in luogo di $c_{n,x}$ il suo valore $\frac{a_{n,x}}{B'^x}$,

$$a_{n,x}=B'^{x-2n}.E'^n\left\{\begin{array}{l}\phi.(n+1)+(x-n-1)\phi\,n+\frac{(x-n-1)(x-n-2)}{2}\phi.(n-1)\\ \ldots\ldots+\frac{(x-n-1)(x-n-2)\ldots(x-2n)}{2.3\ldots n}\phi.1\end{array}\right.$$

Per determinare la funzione arbitraria $\phi.n$ facciamo $x=n+1$, ed otterremo $\phi.(n+1)=\frac{B'^{n-1}}{E'^n}a_{n,n+1}$; ma $a_{n,n+1}$ è $=0$ fuorchè nel solo caso di $n=0$, perciò sarà $\phi.n=0$ eccettuato il caso

di $n=1$, in cui è $\phi.1=\frac{1}{B'}$. Dunque avremo finalmente

$$a_{n,x}=B'^{x-2n-1}.E'^{n}.\frac{(x-n-1)(x-n-2)..(x-2n)}{2.3.....n},$$

e siccome $b_{n,x}=E'a_{n,x-1}$, sarà

$$b_{n,x}=B'^{x-2n-2}.E'^{n+1}.\frac{(x-n-2)(x-n-3)...(x-2n-1)}{2.3...n}.$$

E ponendo questi valori in quello di $\varkappa_x$ otterremo nel caso di x pari

$$\varkappa_x=e^{-\frac{y}{A}}\begin{cases} B'^{x-1}\int^{x-1}dy^{x-1}F.y+B'^{x-3}E'(x-2)\int^{x-2}dy^{x-2}F.y \\ +B'^{x-5}E'^{2}\frac{(x-3)(x-4)}{2}\int^{x-3}dy^{x-3}F.y \ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ \ldots +B'E'^{\frac{x-4}{2}}.\frac{(x+2)x(x-2)}{2^4.3}\int^{\frac{x+2}{2}}dy^{\frac{x+2}{2}}F.y \\ +B'E'^{\frac{x-2}{2}}.\frac{x}{2}\int^{\frac{x}{2}}dy^{\frac{x}{2}}F.y \end{cases}$$

$$+e^{-\frac{y}{A}}\begin{cases} B'^{x-2}E'\int^{x-1}dy^{x-1}F.y+B'^{x-4}E'^{2}(x-3)\int^{x-2}dy^{x-2}F.y \\ +B'^{x-6}E'^{3}\frac{(x-4)(x-5)}{2}\int^{x-3}dy^{x-3}F.y \ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ \ldots\ldots +B'^{2}E'^{\frac{x-2}{2}}.\frac{x(x-2)}{2^4}\int^{\frac{x+2}{2}}dy^{\frac{x+2}{2}}F.y \\ +E'^{\frac{x}{2}}\int^{\frac{x}{2}}dy^{\frac{x}{2}}F.y \end{cases}$$

e nel caso di x dispari

$$z_x = e^{-\frac{\gamma}{A}} \left\{ \begin{array}{l} B'^{x-1}\int^{x-1} dy^{x-1} F.y + B'^{x-3}E'(x-2)\int^{x-2} dy^{x-2} F.y \\ \ldots\ldots + B'^{\frac{x-3}{2}} E'^{\frac{x+1}{2}} \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{2^4} \int^{\frac{x+1}{2}} dy^{\frac{x+1}{2}} F.y \\ + E'^{\frac{x-1}{2}} \int^{\frac{x-1}{2}} dy^{\frac{x-1}{2}} F.y \end{array} \right.$$

$$+ e^{-\frac{\gamma}{A}} \left\{ \begin{array}{l} B'^{x-2}E'\int^{x-1} dy^{x-1} F.y + B'^{x-4}E'^{3}(x-3)\int^{x-2} dy^{x-2} F.y \\ \ldots\ldots + B'^{\frac{x-3}{2}} E'^{\frac{x+3}{2}} \cdot \frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{2^4 \cdot 3} \int^{\frac{x+3}{2}} dy^{\frac{x+3}{2}} F.y \\ + B'E'^{\frac{x-1}{2}} \int^{\frac{x-1}{2}} dy^{\frac{x+1}{2}} F.y \end{array} \right.$$

Rimane adesso a determinare le funzioni $f_{1,x}$, $f_{2,x}$, ec. nella quantità

$$\frac{y^{x-2}}{2.3\ldots(x-2)} f_{1,x} + \frac{y^{x-3}}{2.3\ldots(x-3)} f_{2,x} \ldots + y f_{x-2,x} + f_{x-1,x},$$

che conviene aggiungere al valore di z'_x, perchè diventi completo l'integrale della proposta. A quest'oggetto si sostituisca quella quantità in luogo di z'_x nella equazione

$$\frac{dz'_{x+2}}{dy} = B'z'_{x+1} + E'z'_x$$

ed avrassi

$$0 = \frac{y^{x-1}}{2.3\ldots(x-1)} f_{1,x+2} + \frac{y^{x-2}}{2.3\ldots(x-2)} f_{2,x+2} + \frac{y^{x-3}}{2.3\ldots(x-3)} f_{3,x+2} + \text{ec.}$$

$$- \frac{B'y^{x-1}}{2.3\ldots(x-1)} f_{1,x+1} - \frac{B'y^{x-2}}{2.3\ldots(x-2)} f_{2,x+1} - \frac{B'y^{x-3}}{2.3\ldots(x-3)} f_{3,x+1} - \text{ec.}$$

$$- \frac{E'y^{x-2}}{2.3\ldots(x-2)} f_{1,x} - \frac{E'y^{x-3}}{2.3\ldots(x-3)} f_{2,x} - \text{ec.}$$

e quindi sarà

$$f_{1,x+2} = B'f_{1,x+1}$$

$$f_{n,x+2} = B'f_{n,x+1} + E'f_{n-1,x}.$$

Ponghiamo $f_{n,x}=B'^{x-2n}\phi_{n,x}$, ed avremo

$$\phi_{1,x+2}=\phi_{1,x+1}$$
$$\phi_{n,x+2}=\phi_{n,x+1}+E'\phi_{n-1,x}$$

cioè $\phi_{n,x}=E'\Sigma\phi_{n-1,x-1}$, ove il segno integrale Σ si riferisce alla variabile x. Di quì si ricava

$\phi_{n,x}=E'^{n-1}\Sigma^{n-1}.\phi_{1,x-n+1}$, cioè

$\phi_{n,x+n}=E'^{n-1}\Sigma^{n-1}\phi_{1,x+1}$, e

$\phi_{n,x+n+1}=E'^{n-1}\Sigma^{n-1}\phi_{1,x+2}$, e perciò

$\phi_{n,x+n}=E'^{n-1}\Sigma^{n}.(\phi_{1,x+2}-\phi_{1,x+1})$. A questo valore, perchè sia completo, conviene aggiungere la formola

$$+E'^{n-1}\left(\Psi_n+(x-1)\Psi_{n-1}+\frac{(x-1)(x-2)}{2}\Psi_{n-2}\ldots+\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)}{2.3\ldots(n-1)}\Psi_1\right).$$

Ma $\phi_{1,x+2}-\phi_{1,x+1}=0$; dunque avremo

$$f_{n,x+n}=B'^{x-n}E'^{n-1}\left(\Psi_n+(x-1)\Psi_{n-1}\ldots+\frac{(x-1)\ldots(x-n+1)}{2.3\ldots(n-1)}\Psi_1\right),$$

e quindi ponendo $x-n$ in luogo di x

$$f_{n,x}=B'^{x-2n}.E'^{n-1}\begin{cases}\Psi_n+(x-n-1)\Psi_{n-1}+\dfrac{(x-n-1)(x-n-2)}{2}\Psi_{n-2}\\ \ldots\ldots+\dfrac{(x-n-1)(x-n-2)\ldots(x-2n+1)}{2.3\ldots(n-1)}\Psi_1\end{cases}$$

Sarà pertanto $f_{1,x}=B'^{x-2}\Psi_1$, $f_{2,x}=B'^{x-4}E'[\Psi_2+(x-3)\Psi_1]$,

$f_{3,x}=B'^{x-6}E'^{2}\left[\Psi_3+(x-4)\Psi_2+\dfrac{(x-4)(x-5)}{2}\Psi_1\right]$, ...

$f_{x-2,x}=B'^{-x+4}.E'^{x-3}(\Psi_{x-2}+\Psi_{x-1})$,

$f_{x-1,x}=B'^{-x+2}.E'^{x-2}\Psi_{x-1}$. Laonde al valore precedente di z_x, perchè sia completo, conviene aggiungere la quantità

$$+e^{-\frac{\gamma}{A}}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\gamma^{x-2}}{2.3\ldots(x-2)}B'^{x-2}.\Psi_1+\dfrac{\gamma^{x-3}}{2.3\ldots(x-3)}B'^{x-4}.E'[\Psi_2+(x-3)\Psi_1]\\ +\dfrac{\gamma^{x-4}}{2.3\ldots(x-4)}B'^{x-6}.E'^2\left[\Psi_3+(x-4)\Psi_2+\dfrac{(x-4)(x-5)}{2}\Psi_1\right]\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +\gamma B'^{-x+4}.E'^{x-3}[\Psi_{x-2}+\Psi_{x-1}]+B'^{-x+2}.E'^{x-2}.\Psi_{x-1}\end{array}\right.$$

la qual formola contiene la funzione arbitraria Ψ_x.

10.

Merita particolare attenzione il caso, in cui oltre il termine z_{x+3} mancano nella proposta gli altri due termini z_{x+2} e $\frac{dz_{x+2}}{dy}$. L' equazione diventa allora della forma

$$z_{x+1}+A\frac{dz_{x+1}}{dy}+B\frac{d^2z_{x+1}}{dy^2}=Cz_x+D\frac{dz_x}{dy}+E\frac{d^2z_x}{dy^2}+F\frac{d^3z_x}{dy^3}.$$

Per trovarne l'integrale si ponga $z_x=e^{my}.z'_x$, e presa m in modo, che sia $1+Am+Bm^2=0$, cioè che sia m una radice della equazione $1+At+Bt^2=0$ la proposta diventerà

$$A'\frac{dz'_{x+1}}{dy}+B\frac{d^2z'_{x+1}}{dy^2}=C'z'_x+D'\frac{dz'_x}{dy}+E'\frac{d^2z'_x}{dy^2}+F\frac{d^3z'_x}{dy^3},$$

ove $A'=A+2Bm$, $C'=C+Dm+Em^2+Fm^3$, $D'=D+2Em+3Fm^2$, $E'=E+3Fm$. Si faccia adesso $z'_x=f^x dy^x.z''_x$, ed avrassi

$$A'z''_{x+1}+B\frac{dz''_{x+1}}{dy}=C'z''_x+D'\frac{dz''_x}{dy}+E'\frac{d^2z''_x}{dy^2}+F\frac{d^3z''_x}{dy^3}.$$

Se di nuovo poniamo $z''_x=e^{ny}.z'''_x$, e prendiamo n in modo, che sia $A'+Bn=0$, avremo

$$\frac{dz'''_{x+1}}{dy}=C''z'''_x+D''\frac{dz'''_x}{dy}+E''\frac{d^2z'''_x}{dy^2}+F''\frac{d^3z'''_x}{dy^3},$$

ove $C''=\frac{C'+D'n+E'n^2+Fn^3}{B}$, $D''=\frac{D'+2E'n+3Fn^2}{B}$,
$E''=\frac{E'+3Fn}{B}$, $F'=\frac{F}{B}$. Si osservi, che nella equazione $A'+Bn=0$ mettendo il valore di A' abbiamo $A+2Bm+Bn=0$; ora se chiamiamo m' l'altra radice della equazione $1+At+Bt^2=0$, sarà $m+m'=-\frac{A}{B}$, e quindi $-m-m'+2m+n=0$, cioè $n=m'-m$.

Si faccia adesso $z'''_x=a^x e^{\beta y}$, ed avrassi
$a=\frac{C''}{\beta}+D''+E''\beta+F''\beta^2$, il qual valore inalzato alla potenza x ci darà

$$a^x=\frac{a_{0,x}}{\beta^x}+\frac{a_{1,x}}{\beta^{x-1}}+\frac{a_{2,x}}{\beta^{x-2}}\ldots+a_{3x,x}.\beta^{2x}$$

e di quì dedurremo

$$z'''_x=a_{0,x}\int^x dy^x F.y+a_{1,x}\int^{x-1}dy^{x-1}F.y\ldots+a_{x-1,x}\int dy F.y$$
$$+a_{x,x}F.y+a_{x+1,x}.\frac{dF}{dy}\ldots\ldots\ldots+a_{3x,x}\frac{d^{2x}F}{dy^{2x}}.$$

Il segno integrale $\int^x dy^x F.y$ introdurrà in questo valore una funzione arbitraria di x, ed un'altra ne porterà nel valore di z'_x il segno integrale $\int^x dy^x.z''_x$; onde avrassi il valore completo di z_x con tre funzioni arbitrarie, come meglio si vedrà nell'esempio seguente

II.

Sia proposta l'equazione

$$z_{x+1}+A\frac{dz_{x+1}}{dy}+B\frac{d^2z_{x+1}}{dy^2}=Cz_x.$$

Se ponghiamo $z_x=e^{my}.z'_x$, $z'_x=\int^x dy^x.z''_x$,
$z''_x=e^{(m'-m)y}.z'''_x$, otterremo le seguenti trasformate

$$(A+2Bm)\frac{dz'_{x+1}}{dy}+B\frac{d^2z'_{x+1}}{dy^2}=Cz'_x$$

$$(A+2Bm)z''_{x+1}+B\frac{dz''_{x+1}}{dy}=Cz''_x$$

$$B\frac{dz'''_{x+1}}{dy}=Cz'''_x,$$

l'ultima delle quali integrata ci dà $z'''_x=\frac{C^x}{B^x}\int^x dy^x F.y$; onde avremo

$$z_x=e^{my}\cdot\frac{C^x}{B^x}\int^x dy^x\left(e^{(m'-m)x}\int^x dy^x F.y\right).$$

È facile il vedere, che integrando per parti potremo ridurre questo valore di z_x alla forma seguente

$$z_x=e^{my}(M\int^x dy^x.e^{(m'-m)y}F.y+M'\int^{x-1}dy^{x-1}.e^{(m'-m)y}F.y+\text{ec.})$$
$$+e^{m'y}(N\int^x dy^x F.y+N'\int^{x-1}dy^{x-1}F.y+\text{ec.}),$$

ove i coefficienti M, N, ec. sono funzioni di x. Onde converrà aggiungere al valore di z_x le quantità

$$e^{my}\left(\frac{y^{x-1}}{2.3...(x-1)}f_{1,x}+\frac{y^{x-2}}{2.3...(x-2)}f_{2,x}\cdots+f_{x,x}\right),$$

$$e^{m'y}\left(\frac{y^{x-1}}{2\,3...(x-1)}f'_{1,x}+\frac{y^{x-2}}{2.3...(x-2)}f'_{2,x}\cdots+f'_{x,x}\right).$$

Per determinare le funzioni $f_{1,x}$, $f'_{1,x}$, ec. sostituiamo la prima delle quantità precedenti nella proposta in luogo di z_x, e riflettendo che $1+Am+Bm^2=0$ troveremo

$$0=\frac{\gamma^{x-1}}{2.3...(x-1)}[(A+2Bm)f_{1,x+1}-Cf_{1,x}]$$
$$+\frac{\gamma^{x-2}}{2.3...(x-2)}[(A+2Bm)f_{2,x+1}-Cf_{2,x}-Bf_{1,x+1}]$$
$$+\frac{\gamma^{x-3}}{2.3...(x-3)}[(A+2Bm)f_{3,x+1}-Cf_{3,x}-Bf_{2,x+1}]$$
$$+ \text{ec.}$$

Quindi otterremo

$$(A+2Bm)f_{1,x+1}=Cf_{1,x}$$
$$(A+2Bm)f_{n,x+1}=Cf_{n,x}+Bf_{n-1,x+1}$$

e sostituendovi il valore di $A=-B(m+m')$ sarà

$$B(m-m')f_{1,x+1}=Cf_{1,x}$$
$$B(m-m')f_{n,x+1}=Cf_{n,x}+Bf_{n-1,x+1}.$$

Facciasi $f_{n,x}=\frac{C^x}{B^x(m-m')^x}\phi_{n,x}$, e si avrà

$$\phi_{1,x+1}=\phi_{1,x}$$
$$\phi_{n,x+1}=\phi_{n,x}+\frac{1}{m-m'}\phi_{n-1,x+1}.$$

Da questa ultima equazione si deduce

$\phi_{n,x}=\frac{1}{(m-m')^{n-1}}\Sigma^{n-1}.\phi_{1,x+n-1}$, cioè

$\phi_{n,x-n+1}=\frac{1}{(m-m')^{n-1}}\Sigma^{n-1}\phi_{1,x}$, e quindi

$\phi_{n,x-n+1}=\frac{1}{(m-m')^{n-1}}\Sigma^{n}.(\phi_{1,x+1}-\phi_{x})$. Ma poichè

$\phi_{1,x+1}-\phi_{x}=0$, avremo

$$\phi_{n,x-n+1}=\frac{1}{(m-m')^{n-1}}\left(\Psi_{n}+(x+1)\Psi_{n-1}+\frac{(x+1)x}{2}\Psi_{n-2}...+\frac{(x+1)x...(x-n+3)}{2.3...(n-1)}\Psi_{1}\right)$$

e perciò otterremo

$$f_{n,x}=\frac{C^x}{B^x(m-m')^{x+n-1}}\left\{\begin{array}{l}\Psi_n+(x+n)\Psi_{n-1}+\dfrac{(x+n)(x+n-1)}{2}\Psi_{n-2}\\ \ldots\ldots+\dfrac{(x+n)(x+n-1)\ldots(x+2)}{2\cdot 3\ldots(n-1)}\Psi_1\end{array}\right.$$

Facilmente apparisce che questo valore di $f_{n,x}$ si cangerà in quello di $f'_{n,x}$, se solamente si muterà m in m', e viceversa m' in m: pertanto l'integrale completo della proposta sarà

$$z_x=e^{my}\frac{C^x}{B^x}\int^x dy^x e^{(m'-m)y}\int^x dy^x F.y$$

$$+\frac{e^{my}C^x}{B^x(m-m')^x}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{y^{x-1}}{2.3\ldots(x-1)}\Psi_1+\dfrac{y^{x-2}}{2.3\ldots(x-2)}\cdot\dfrac{1}{m-m'}\left[\Psi_2+(x+2)\Psi_1\right]\\ +\dfrac{y^{x-3}}{2.3\ldots(x-3)}\cdot\dfrac{1}{(m-m')^2}\left[\Psi_3+(x+3)\Psi_2+\dfrac{(x+3)(x+2)}{2}\Psi_1\right]\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +\dfrac{1}{(m-m')^{x-1}}\left[\Psi_x+2x\Psi_{x-1}\ldots+\dfrac{2x(2x-1)\ldots(x+2)}{2.3\ldots(x-1)}\Psi_1\right]\end{array}\right.$$

$$+\frac{e^{m'y}C^x}{B^x(m'-m)^x}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{y^{x-1}}{2.3\ldots(x-1)}\Psi'_1+\dfrac{y^{x-2}}{2.3\ldots(x-2)}\cdot\dfrac{1}{m'-m}\left[\Psi'_2+(x+2)\Psi'_1\right]\\ +\dfrac{y^{x-3}}{2.3\ldots(x-3)}\cdot\dfrac{1}{(m'-m)^2}\left[\Psi'_3+(x+3)\Psi'_2+\dfrac{(x+3)(x+2)}{2}\Psi'_1\right]\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +\dfrac{1}{(m'-m)^{x-1}}\left[\Psi'_x+2x\Psi'_{x-1}\ldots+\dfrac{2x(2x-1)\ldots(x+2)}{2.3\ldots(x-1)}\Psi'_1\right]\end{array}\right.$$

12.

Dalle cose precedenti apparisce, che i medesimi metodi condurranno sempre alla integrazione dell'equazioni lineari a differenze parziali finite e infinitesime tra tre variabili, qualunque sia l'ordine dell'equazioni, purchè i coefficienti siano costanti. Ma se la forma dell'equazioni rimanendo la medesima, i coefficienti saranno funzioni di x, in tal caso la loro integrazione si può ridurre a quella dell'equazioni a differenze finite con i coefficienti variabili. Sia data per esempio la seguente equazione del prim'ordine

$$z_{x+1}=A_x z_x+B_x \frac{dz_x}{dy},$$

ove i coefficienti A_x e B_x sono funzioni date di x. Se poniamo $z_0=F.y$, l'integrale di questa equazione mediante le sostituzioni successive, prenderà la forma

$$z_x=a_{0,x}F.y+a_{1,x}\frac{dF}{dy}+a_{2,x}\frac{d^2F}{dy^2}\ldots+a_{x,x}\frac{d^xF}{dy^x}.$$

Per determinare le quantità $a_{0,x}$, $a_{1,x}$, ec. sostituiamo questo valore nella proposta, e ne ricaveremo l'equazione

$$\begin{aligned}0=&a_{0,x+1}.F.y+a_{1,x+1}\frac{dF}{dy}+a_{2,x+1}\frac{d^2F}{dy^2}+\text{ec.}\\&-A_x a_{0,x}.F.y-A_x a_{1,x}\frac{dF}{dy}-A_x a_{2,x}\frac{d^2F}{dy^2}-\text{ec.}\\&-B_x a_{0,x}\frac{dF}{dy}-B_x a_{1,x}\frac{d^2F}{dy^2}-\text{ec.}\end{aligned}$$

e quindi avremo

$$\begin{aligned}a_{0,x+1}&=A_x a_{0,x}\\a_{1,x+1}&=A_x a_{1,x}+B_x a_{0,x}\end{aligned}$$

e generalmente

$$a_{n,x+1}=A_x a_{n,x}+B_x a_{n-1,x},$$

dalla qual'equazione perciò dipenderà l'integrazione della proposta.

13.

Consideriamo adesso l'equazione del second'ordine

$$z_{x+1}-A_x\frac{dz_{x+1}}{dy}=B_x z_x+C_x\frac{dz_x}{dy}+D_x\frac{d^2z_x}{dy^2}.$$

Ponendo $x=0$ e $z_0=F.y$, essa ci darà la seguente

$$z_1-A_0\frac{dz_1}{dy}=B_0F.y+C_0\frac{dF}{dy}+D_0\frac{d^2F}{dy^2}=u_1.$$

Così pure, se si fà $x=1$, sarà

$$z_2 - A_1 \frac{dz_2}{dy} = B_1 z_1 + C_1 \frac{dz_1}{dy} + D_1 \frac{d^2 z_1}{dy^2}$$

$$\frac{dz_2}{dy} - A_1 \frac{d^2 z_2}{dy^2} = B_1 \frac{dz_1}{ay} + C_1 \frac{d^2 z_1}{dy^2} + D_1 \frac{d^3 z_1}{dy^3}$$

e quindi dedurremo

$$z_2 - A_1 \frac{dz_2}{dy} - A_0 \left(\frac{dz_2}{dy} - A_1 \frac{d^2 z_2}{dy^2} \right) = B_1 u_1 + C_1 \frac{du_1}{dy} + D_1 \frac{d^2 u_1}{dy^2},$$

la qual'equazione rappresenteremo così,

$$z_2 + a_2 \frac{dz_2}{dy} + a'_2 \frac{d^2 z_2}{dy^2} = u_2,$$

ove i coefficienti a_2, a'_2 sono tali, che

$$1 + a_2 t + a'_2 t^2 = (1 - A_0 t)(1 - A_1 t).$$

Facendo adesso $x = 2$ otterremo

$$z_3 - A_2 \frac{dz_3}{dy} = B_2 z_2 + C_2 \frac{dz_2}{dy} + D_2 \frac{d^2 z_2}{dy^2}$$

$$\frac{dz_3}{dy} - A_2 \frac{d^2 z_3}{dy^2} = B_2 \frac{dz_2}{dy} + C_2 \frac{d^2 z_2}{dy^2} + D_2 \frac{d^3 z_2}{dy^3}$$

$$\frac{d^2 z_3}{dy^2} - A_2 \frac{d^3 z_3}{dy^3} = B_2 \frac{d^2 z_2}{dy^2} + C_2 \frac{d^3 z_2}{dy^3} + D_2 \frac{d^4 z_2}{dy^4}$$

donde si ricava

$$z_3 - A_2 \frac{dz_3}{dy} + a_2 \left(\frac{dz_3}{dy} - A_2 \frac{d^2 z_3}{dy^2} \right) + a'_2 \left(\frac{d^2 z_3}{dy^2} - A_2 \frac{d^3 z_3}{dy^3} \right)$$

$$= B_2 u_2 + C_2 \frac{du_2}{dy} + D_2 \frac{d^2 u_2}{dy^2},$$

la qual'equazione se si pone sotto la forma

$$z_3 + a_3 \frac{dz_3}{dy} + a'_3 \frac{d^2 z_3}{dy^2} + a''_3 \frac{d^3 z_3}{dy^3} = u_3,$$

sarà la quantità $1 + a_3 t + a'_3 t^2 + a''_3 t^3 = (1 + a_2 t + a'_2 t^2)(1 - A_2 t)$
$= (1 - A_0 t)(1 - A_1 t)(1 - A_2 t)$.

Continuando ad operare nella medesima maniera giungeremo finalmente alla equazione

$$(A)\quad z_x + a_x \frac{dz_x}{dy} + a'_x \frac{d^2 z_x}{dy^2} \ldots + a_x^{(x-1)} \frac{d^x z_x}{dy^x} = u_x ,$$

ove i coefficienti a_x , a'_x , ec. sono tali, che

$$1 + a_x t + a'_x t^2 \ldots + a_x^{(x-1)} t^x = (1 - A_0 t)(1 - A_1 t)(1 - A_2 t) \ldots (1 - A_{x-1} t),$$

e per determinare u_x abbiamo l'equazione

$$u_{x+1} = B_x u_x + C_x \frac{du_x}{dy} + D_x \frac{d^2 u_x}{dy^2} ,$$

la quale possiamo trattare col metodo usato nel numero precedente. Solo conviene osservare, che l'integrazione di questa non introdurrà una nuova funzione arbitraria u_0 , perchè sarà $u_0 = z_0 = F.y$. Infatti l'equazione ci dà

$$u_1 = B_0 u_0 + C_0 \frac{du_0}{dy} + D_0 \frac{d^2 u_0}{dy^2} ,$$

e sopra abbiamo posto

$$u_1 = B_0 F.y + C_0 \frac{dF}{dy} + D_0 \frac{d^2 F}{dy^2} ,$$

dunque sarà $u_0 = F.y$.

Trovato il valore di u_x potremo nella equazione (A) riguardare x come costante, ed il di lei integrale sarà (Tomo II. num. 146.)

$$z_x = \frac{e^{\frac{y}{A_0}} \int e^{-\frac{y}{A_0}} . u_x dy}{m} + \frac{e^{\frac{y}{A_1}} \int e^{-\frac{y}{A_1}} . u_x dy}{m'} + \text{ec.}$$
$$+ e^{\frac{y}{A_0}} f_{1,x} + e^{\frac{y}{A_1}} f_{2,x} + e^{\frac{y}{A_2}} f_{3,x} \ldots + e^{\frac{y}{A_{x-1}}} f_{x,x} .$$

Per determinare le funzioni $f_{1,x}$, $f_{2,x}$, ec. sostituiamo questo valore di z_x nella proposta, e troveremo

$$A_0(A_0-A_x)f_{1,x+1}=(\overline{A_0}^2B_x+A_0C_x+D_x)f_{1,x}$$

$$A_1(A_1-A_x)f_{2,x+1}=(\overline{A_1}^2B_x+A_1C_x+D_x)f_{2,x}$$

e generalmente

$$A_n(A_n-A_x)f_{n+1,x+1}=(\overline{A_n}^2B_x+A_nC_x+D_x)f_{n+1,x}.$$

L'integrale di questa equazione sarà della forma

$$f_{n,x}=P_{n,x}.\phi_n,$$

ove $P_{n,x}$ è una funzione data di n ed x, e ϕ_n una funzione arbitraria di n; e poichè si deve prendere il valore di $f_{n,x}$ da $n=1$ fino ad $n=x$, esso introdurrà nell'integrale della proposta una nuova funzione arbitraria di x.

14.

Le due equazioni contemplate ci fanno conoscere il metodo, che in ogni caso si deve tenere, per ridurre l'integrazione di qualunque equazione lineare a differenze parziali miste con i coefficienti funzioni di x alla integrazione di una simile equazione a differenze parziali finite. Se nell'equazioni oltre i termini moltiplicati per z_x e per le sue differenze vi fosse anche un termine P_x funzione di x, l'integrazione non avrebbe alcuna difficoltà. Sia data per esempio l'equazione

$$z_{x+1}=A_xz_x+B_x\frac{dz_x}{dy}+P_x,$$

e ponghiamo che il di lei integrale nel caso di $P_x=0$ sia $z_x=M_x$. Facciamo $z_x=M_x+u_x$, essendo u_x funzione di x, e sostituendo questo valore nella proposta avremo

$$M_{x+1}+u_{x+1}=A_x(M_x+u_x)+B_x\frac{dM_x}{dy}+P_x$$

la quale a motivo di

$$M_{x+1}=A_xM_x+B_x\frac{dM_x}{dy}$$

ci darà

$$u_{x+1}=A_x u_x+P_x\,,$$

che è una equazione a differenze ordinarie finite.

Allorchè i coefficienti sono costanti, il termine aggiunto potrà anche essere funzione di y. Sia data per esempio l'equazione

$$z_{x+1}=Az_x+B\frac{dz_x}{dy}+P\,,$$

della quale l'integrale nel caso di $P=0$ sia $z_x=M_x$. Facciamo $z_x=M_x+u$, essendo u funzione di y, e sostituendo avremo

$$M_{x+1}+u=A(M_x+u)+B\left(\frac{dM_x}{dy}+\frac{du}{dy}\right)+P,$$

e quindi per determinare u otterremo

$$(1-A)u=B\frac{du}{dy}+P\,,$$

che è una equazione differenziale ordinaria. Lo stesso accaderà in tutti gli altri casi.

15.

Ma se il termine aggiunto sarà insieme funzione di x e di y, l'integrazione incontrerà molte difficoltà. Prendiamo a considerare in primo luogo l'equazione semplicissima

$$z_{x+1}=\frac{dz_x}{dy}+P_x\,,$$

ove P_x è una funzione data di x ed y. Ponghiamo

$z_x=\dfrac{d^x Z_x}{dy^x}$, e sostituendo avremo

$$\frac{d^{x+1}Z_{x+1}}{dy^{x+1}}=\frac{d^{x+1}Z_x}{dy^{x+1}}+P_x\,,$$

cioè $\dfrac{d^{x+1}.\Delta Z_x}{dy^{x+1}}=P_x$, e quindi $\Delta Z_x=\int^{x+1} dy^{x+1} P_x$, e

$Z_x = F.y + \Sigma \int^{x+1} dy^{x+1} . P_x$, ove ho aggiunto la funzione arbitraria $F.y$, perchè l'integrale Σ si prende relativamente ad x nella ipotesi di y costante. Sarà pertanto l'integrale della equazione proposta

$$z_x = \frac{d^x F.y}{dy^x} + \frac{d^x \Sigma (\int^{x+1} dy^{x+1} . P_x)}{dy^x} .$$

Troviamo quì per la prima volta introdotta nell'Analisi l'espressione $\Sigma \int^{x+1} dy^{x+1} . P_x$, la quale indica che si deve prendere l'integrale finito della quantità $\int^{x+1} dy^{x+1} . P_x$. Vedremo in seguito in qualch'esempio, che questa operazione, quando è possibile, si eseguisce con le medesime regole, le quali servono per conseguire la somma di una semplice funzione di x. Intanto osserveremo, che in generale la formola $\frac{d^x \Sigma \int^{x+1} dy^{x+1} . P_x}{dy^x}$ può ridursi ad un integrale *definito*. Infatti

$$\Sigma \int^{x+1} dy^{x+1} . P_x = \int dy P_0 + \int^2 dy^2 P_1 + \int^3 dy^3 P_2 \ldots + \int^x dy^x P_{x-1}$$

e perciò

$$\frac{d^x \Sigma \int^{x+1} dy^{x+1} P_x}{dy^x} = \frac{d^{x-1} P_0}{dy^{x-1}} + \frac{d^{x-2} P_1}{dy^{x-2}} + \frac{d^{x-3} P_2}{dy^{x-3}} \ldots + P_{x-1}$$

la qual quantità è rappresentata dalla formola $\Sigma . \frac{d^r . P_{x-r-1}}{dy^r}$, purchè si prenda questo integrale relativamente ad r da $r = 0$ fino ad $r = x-1$.

16.

Data l'equazione più generale

$$az_{x+1} + bz_x = \frac{dz_x}{dy} + P_x ,$$

ove a è funzione di x, b funzione di y, e P_x funzione di x ed y, facciamo $z_x = Z_x . Z'_x$, e sostituendo avremo

$$aZ_{x+1} . Z'_{x+1} + bZ_x . Z'_x = Z'_x \frac{dZ_x}{dy} + Z_x \frac{dZ'_x}{dy} + P_x .$$

Ponghiamo

$$aZ_{x+1} = Z_x$$

$$bZ_x = \frac{dZ_x}{dy}$$

ed avremo ancora

$$Z'_{x+1} = \frac{dZ'_x}{dy} + \frac{P_x}{Z_x} .$$

La prima di quest'equazioni integrata ci dà $Z_x = e^{-\Sigma \log . a} . F.y$, sostituendo il qual valore nella seconda abbiamo $F.y = e^{\int b dy}$, e quindi $Z_x = e^{\int b dy - \Sigma \log . a}$. Posto questo valore nella terza otterremo (15) $Z'_x = \dfrac{d^x [f.y + \Sigma (e^{\Sigma \log . a} \int^{x+1} dy^{x+1} . P_x e^{-\int b dy})]}{dy^x}$,

e perciò l'integrale della proposta sarà

$$z_x = e^{\int b dy - \Sigma \log . a} . \frac{d^x f.y}{dy^x} + e^{\int b dy - \Sigma \log . a} . \frac{d^x \Sigma (e^{\Sigma \log . a} \int^{x+1} dy^{x+1} P_x e^{-\int b dy})}{dy^x} .$$

Se a e b fossero costanti, sarebbe $e^{\int b dy} = e^{by}$, $e^{\Sigma \log . a} = a^x$, ed il valore di z_x diventerebbe in tal caso

$$z_x = \frac{e^{by}}{a^x} \left[\frac{d^x f.y}{dy^x} + \frac{d^x \Sigma (a^x \int^{x+1} dy^{x+1} . P_x e^{-by})}{dy^x} \right] .$$

17.

Potremo adesso integrare l'equazione dell' ordine n

$$\frac{d^n z_x}{dy^n} + A\frac{d^{n-1} z_{x+1}}{dy^{n-1}} + B\frac{d^{n-2} z_{x+2}}{dy^{n-2}} \ldots + M\frac{dz_{x+n-1}}{dy} + Nz_{x+n} = P_x,$$

ove A, B, ... N sono quantità costanti, e P_x funzione di x ed y. Ponghiamo

$$\frac{d^{n-1} z_x}{dy^{n-1}} + A'\frac{d^{n-2} z_{x+1}}{dy^{n-2}} + B'\frac{d^{n-3} z_{x+2}}{dy^{n-3}} \ldots + M'z_{x+n-1} = X_x,$$

e se in questa equazione accresciamo x dell'unità, o pure la differenziamo per rapporto ad y, avremo le due equazioni

$$(a)\quad \frac{d^{n-1} z_{x+1}}{dy^{n-1}} + A'\frac{d^{n-2} z_{x+2}}{dy^{n-2}} + B'\frac{d^{n-3} z_{x+3}}{dy^{n-3}} \ldots + M'z_{x+n} = X_{x+1}$$

$$(b)\quad \frac{d^n z_x}{dy^n} + A'\frac{d^{n-1} z_{x+1}}{dy^{n-1}} + B'\frac{d^{n-2} z_{x+2}}{dy^{n-2}} \ldots + M'\frac{dz_{x+n-1}}{dy} = \frac{dX_x}{dy}.$$

Paragoniamo con la proposta l'equazione $(b)-(a)a$, ove a è costante, ed otterremo

$$\frac{dX_x}{dy} - aX_{x+1} = P_x$$
$$A' - a = A$$
$$B' - aA' = B$$
$$C' - aB' = C$$
$$\vdots$$
$$-aM' = N.$$

Quindi ricaveremo

$$A'=a+A$$
$$B'=a^2+Aa+B$$
$$C'=a^3+Aa^2+Ba+C$$
$$\vdots$$
$$M'=a^{n-1}+Aa^{n-2}+Ba^{n-3}+Ca^{n-4}\ldots+M$$

ed a motivo di $-aM'=N$

$$(Q)\qquad a^n+Aa^{n-1}+Ba^{n-2}+Ca^{n-3}\ldots+N=0\,.$$

Sarà dunque a una radice di questa equazione, ed integrando l'equazione $\frac{dX_x}{dy}-aX_{x+1}=P_x$ otterremo (16)

$$X_x=-\frac{1}{a^x}\cdot\frac{d^x\Sigma(a^x\int^{x+1}dy^{x+1}P_x)}{dy^x},$$ ove per brevità tralascio la funzione arbitraria, perchè si può considerare compresa nel segno Σ. Trovati così i valori di A', B', ... M', ed X_x si conoscerà l'integrale primo della proposta

$$\frac{d^{n-1}z_x}{dy^{n-1}}+A'\frac{d^{n-2}z_{x+1}}{dy^{n-2}}+B'\frac{d^{n-3}z_{x+2}}{dy^{n-3}}\ldots+M'z_{x+n-1}=X_x\,.$$

Trattando questa equazione nella medesima maniera, che la proposta, ponghiamo

$$\frac{d^{n-2}z_x}{dy^{n-2}}+A''\frac{d^{n-3}z_{x+1}}{dy^{n-3}}\ldots+L''z_{x+n-2}=X'_x\,,$$

e troveremo similmente

$$\frac{dX'_x}{dy}-a'X'_{x+1}=Y_x\,,$$

essendo a' una radice della equazione

$$(Q')\quad a'^{n-1}+A'a'^{n-2}+B'a'^{n-2}\ldots+M'=0.$$

Ora se questa equazione (Q') la moltiplichiamo per $a'-a$, avremo

$$a'^n + A'a'^{n-1} + B'a'^{n-2} + C'a'^{n-3} \ldots + M'a' - aa'^{n-1} - aA'a'^{n-2} - aB'a'^{n-3} \ldots - aL'a' - aM' = 0,$$

cioè sostituendo i valori di A', B', ec.

$$a'^n + Aa'^{n-1} + Ba'^{n-2} + Ca'^{n-3} \ldots + N = 0.$$

Questa ultima equazione essendo affatto simile alla equazione (Q), è chiaro che l'equazione (Q') ha le medesime radici che l'equazione (Q), eccettuata quella, che è già stata contemplata. Posto ciò avremo

$$X'_x = -\frac{1}{a'^x} \cdot \frac{d^x \Sigma(a'^x \int^{x+1} dy^{x+1} . X_x)}{dy^x},$$

ove a' è una radice della equazione (Q) diversa da a. Ma $\int^{x+1} dy^{x+1} . X_x = -\frac{1}{a^x} \int dy \Sigma(a^x \int^{x+1} dy^{x+1} . P_x)$

$= -\frac{1}{a^x} \Sigma(a^x \int^{x+2} dy^{x+2} . P_x)$; dunque sostituendo questo valore avremo

$$X'_x = \frac{1}{a'^x} \cdot \frac{d^x \Sigma \left(\frac{a'}{a}\right)^x \Sigma a^x \int^{x+2} dy^{x+2} . P_x}{dy^x}.$$

Così pure, se chiameremo X''_x il secondo membro dell'integrale terzo, ed a'' sarà un'altra radice della equazione (Q), otterremo

$$X''_x = \frac{1}{a''^x} \cdot \frac{d^x \Sigma \left(\frac{a''}{a'}\right)^x \Sigma a'^x \int^{x+2} dy^{x+2} . X_x}{dy^x},$$

e sostituendo il valore di X_x

$$X''_x = -\frac{1}{a''^x} \cdot \frac{d^x \Sigma \left(\frac{a''}{a'}\right)^x \Sigma \left(\frac{a'}{a}\right)^x \Sigma a^x \int^{x+3} dy^{x+3} . P_x}{dy^x}.$$

Quindi facilmente apparisce, che l'integrale finito della proposta sarà

$$z_x = \frac{(-1)^n}{a^x} \cdot \frac{d^x \Sigma \left(\frac{a}{a'}\right)^x \Sigma \left(\frac{a'}{a''}\right)^x \ldots \Sigma \left(\frac{a^{(n-2)}}{a^{(n-1)}}\right)^x \Sigma (a^{(n-1)})^x \int^{x+n} dy^{x+n} . P_x}{dy^x},$$

ove a, a', $\ldots$ $a^{(n-1)}$ sono le n radici della equazione (Q) prese in quell'ordine che più piace. Se tutte queste radici fossero eguali, si renderebbe molto più semplice la forma dell'integrale, e sarebbe

$$z_x = \frac{(-1)^n}{a^x} \cdot \frac{d^x \Sigma^n (a^x \int^{x+n} dy^{x+n} . P_x)}{dy^x} .$$

18.

Ma quando le radici sono disuguali, è assai più pregevole un'altra forma d'integrale composta di varie parti, ciascuna delle quali non contiene che un solo segno sommatorio Σ. Ad oggetto di rintracciare questa nuova forma ripigliamo l'equazione

$$\frac{d^{n-1} z_x}{dy^{n-1}} + A' \frac{d^{n-2} z_{x+1}}{dy^{n-2}} + B' \frac{d^{n-3} z_{x+2}}{dy^{n-3}} \ldots + M' z_{x+n-1} = X_x ,$$

ed osserviamo che prendendo in luogo di a le altre radici a', a'', ec. della equazione (Q) avremo gli altri integrali primi

$$\frac{d^{n-1} z_x}{dy^{n-1}} + A_1' \frac{d^{n-2} z_{x+1}}{dy^{n-2}} + B_1' \frac{d^{n-3} z_{x+2}}{dy^{n-3}} \ldots + M_1' z_{x+n-1} = X_{1x}$$

$$\frac{d^{n-1} z_x}{dy^{n-1}} + A_2' \frac{d^{n-2} z_{x+1}}{dy^{n-2}} \ldots\ldots\ldots + M_2' z_{x+n-1} = X_{2x}$$

ec.

ove A_1', A_2', ec. B_1', B_2', ec. ed X_{1x}, X_{2x}, ec. sono respettivamente i valori di A', B', ec., ed X_x, quando a si cangia in a', a'', ec. Ora essendo n quest'integrali, potremo

col loro mezzo eliminare i differenziali $\frac{d^{n-1}z_x}{dy^{n-1}}$, $\frac{d^{n-2}z_{x+1}}{dy^{n-2}}$... $\frac{dz_{x+n-2}}{dy}$, e facilmente si vede che risulterà da questa eliminazione il valore di z_{x+n-1} così espresso,

$$z_{x+n-1}=\frac{X_x}{m}+\frac{X_1{}_x}{m'}+\frac{X_2{}_x}{m''}+\text{ec.}$$

essendo m, m', m'', ec. quantità costanti.

Per determinarle sostituiamo il valore di z_{x+n-1} nella prima dell'equazioni integrali, ed osservando che $\frac{dX_{x-1}}{dy}=aX_x+P_{x-1}$, e similmente $\frac{d^2X_{x-2}}{dy^2}=a\frac{dX_{x-1}}{dy}+\frac{dP_{x-2}}{dy}=a^2X_x+aP_{x-1}+\frac{dP_{x-2}}{dy}$, e così in seguito, otterremo

$$\begin{aligned}
X_x=&X_x\cdot\frac{a^{n-1}+A'a^{n-2}+B'a^{n-3}\ldots+M'}{m}\\
&+(A)\frac{P_{x-1}}{m}+(B)\frac{dP_{x-2}}{mdy}+(C)\frac{d^2P_{x-3}}{mdy^2}+\text{ec.}\\
&+X1_x\cdot\frac{a'^{n-1}+A'a'^{n-2}+B'a'^{n-3}\ldots+M'}{m'}\\
&+(A')\frac{P_{x-1}}{m'}+(B')\frac{dP_{x-2}}{m'dy}+\text{ec.}\\
&+X2_x\cdot\frac{a''^{n-1}+A'a''^{n-2}\ldots\ldots+M'}{m''}\\
&+(A'')\frac{P_{x-1}}{m''}+\text{ec.}\\
&+\text{ec.}
\end{aligned}$$

Ora, questa equazione dovendo essere identica, avremo

$$1=\frac{a^{n-1}+A'a^{n-2}+B'a^{n-3}\ldots+M'}{m},$$

onde si deduce

$$m=a^{n-1}+A'a^{n-2}+B'a^{n-3}\ldots+M',$$

e gli altri termini svaniranno.

Se nel valore trovato di m sostituiamo quei di A', B', ec., troveremo

$$m=na^{n-1}+(n-1)Aa^{n-2}+(n-2)Ba^{n-3}\ldots+M;$$

onde apparisce che m è eguale al differenziale della quantità

$$a^n+Aa^{n-1}+Ba^{n-2}\ldots+Ma+N$$

preso per rapporto ad a, e diviso per da. Il valore di m si cangerà in quelli di m', m'', ec., se muteremo a in a', a'', ec., com'è facile a vedersi, se in luogo di sostituirsi il valore di z_{x+n-1} nella prima dell'equazioni integrali si sostituisce in una delle altre. Se dunque ponghiamo

$$T=t^n+At^{n-1}+Bt^{n-2}\ldots+Mt+N,$$

avremo $m=\frac{dT}{dt}$ facendovi $t=a$, $m'=\frac{dT}{dt}$ facendovi $t=a'$, ec., pve a, a', ec. sono le radici della equazione $T=0$.

Determinate le quantità m, m', ec. sarà il valore di z_{x+n-1} così espresso;

$$z_{x+n-1}=\frac{1}{a^x}\cdot\frac{d^xF.y}{dy^x}-\frac{1}{a^x}\cdot\frac{d^x\Sigma(a^x\int^{x+1}dy^{x+1}.P_x)}{mdy^x}$$
$$+\frac{1}{a'^x}\cdot\frac{d^xF'.y}{dy^x}-\frac{1}{a'^x}\cdot\frac{d^x\Sigma(a'^x\int^{x+1}dy^{x+1}.P_x)}{m'dy^x}$$
$$+\frac{1}{a''^x}\cdot\frac{d^xF''.y}{dy^x}-\frac{1}{a''^x}\cdot\frac{d^x\Sigma(a''^x\int^{x+1}dy^{x+1}.P_x)}{m''dy^x}$$
$$+\text{ec.}$$

il quale, posto $x-n+1$ invece di x, diventa

$$z_x = \frac{1}{x} \cdot \frac{d^x F.y}{dy^x} - \frac{1}{a^x} \cdot \frac{d^x \Sigma(a^x \int^{x+1} dy^{x+1} . P_{x-n+1})}{m dy^x}$$

$$+ \frac{1}{a'^x} \cdot \frac{d^x F'.y}{dy^x} - \frac{1}{a'^x} \cdot \frac{d^x \Sigma(a'^x \int^{x+1} dy^{x+1} . P_{x-n+1})}{m' dy^x}$$

$$+ \text{ec.}$$

ove ho scritto $\frac{1}{a^x} \cdot \frac{d^x F.y}{dy^x}$ in luogo di $\frac{1}{a^{x-n+1}} \cdot \frac{d^{x-n+1} F.y}{dy^{x-n+1}}$, poichè essendo $F.y$ una funzione arbitraria, si può mettere $F.y$ invece di $\frac{1}{a^{-n+1}} \cdot \frac{d^{1-n} F.y}{dy^{1-n}}$.

Possiamo render più semplice la forma di questo integrale, se osserviamo che

$$\frac{1}{a^x} \cdot \frac{d^x \Sigma(a^x \int^{x+1} dy^{x+1} . P_{x-n+1})}{dy^x} = \Sigma . \frac{d^r . P_{x-n-r}}{a^{r+1} dy^r},$$

purchè si prenda questo secondo integrale da $r=o$ fino ad $r=x-n$. Pertanto l'integrale della proposta potrà esprimersi così:

$$z_x = \frac{d^x F.y}{a^x dy^x} + \frac{d^x F'.y}{a'^x dy^x} + \frac{d^x F''.y}{a''^x dy^x} + \text{ec.}$$

$$- \Sigma . \left(\frac{a^{-r-1}}{m} + \frac{a'^{-r-1}}{m'} + \frac{a''^{-r-1}}{m''} + \text{ec.} \right) \cdot \frac{d^r . P_{x-n-r}}{dy^r},$$

ove si deve prendere l'integrale Σ relativamente ad r da $r=o$ fino ad $r=x-n$.

19.

Il valore trovato di z_x ammette una forma più semplice, quando P_x è funzione della sola x o della sola y. Nel primo caso è chiaro che sarà

$$z_x = \frac{d^x F.y}{a^x dy^x} + \frac{d^x F.y}{a'^x dy^x} + \text{ec.}$$
$$-\left(\frac{a^{-1}}{m} + \frac{a'^{-1}}{m'} + \frac{a''^{-1}}{m''} + \text{ec.}\right).P_{x-n},$$

ove si noti che

$$\frac{a^{-1}}{m} + \frac{a'^{-1}}{m'} + \frac{a''^{-1}}{m''} + \text{ec.} = -\frac{1}{N}.$$

Infatti se ponghiamo

$$\frac{1}{m(t-a)} + \frac{1}{m'(t-a')} + \frac{1}{m''(t-a'')} + \text{ec.} = \frac{1}{T},$$

troveremo (Tomo II. n.° 120) per m, m', m'', ec. quei medesimi valori, che sopra abbiamo a queste quantità assegnati. Posta $t=0$ T diventerà $=N$, e perciò

$$-\frac{1}{ma} - \frac{1}{m'a'} - \frac{1}{m''a''} - \text{ec.} = \frac{1}{N}.$$

20.

Nel secondo caso la quantità $\Sigma.a^{-r-1}\frac{d^r P}{dy^r}$ è eguale ad

$$a^{-1}P + a^{-2}\frac{dP}{dy} + a^{-3}\frac{d^2P}{dy^2} \ldots + a^{-x+n-1}.\frac{d^{x-n}P}{dy^{x-n}}.$$

Ponghiamo questa quantità $=Q$, e facilmente vedremo essere

$$\frac{dQ}{dy} = aQ - P + a^{-x+n-1}.\frac{d^{x-n+1}P}{dy^{x-n+1}},$$

l'integrazione della qual'equazione ci darà

$$Q = e^{ay}.a^{-x+n-1}\int e^{-ay}.\frac{d^{x-n+1}P}{dy^{x-n}} - e^{ay}\int e^{-ay}P dy + e^{ay}f.x :$$

ma poichè $Q=0$ quando $P=0$, svanirà la funzione arbitraria $f.x$. Ora integrando per parti abbiamo

$$e^{ay}\int e^{-ay}\cdot\frac{d^{x-n+1}P}{dy^{x-n}}=\frac{d^{x-n}.P}{dy^{x-n}}+ae^{ay}\int e^{-ay}\cdot\frac{d^{x-n}P}{dy^{x-n-1}}$$

$$=\frac{1}{dy}d.\left(e^{ay}\int e^{-ay}\cdot\frac{d^{x-n}P}{dy^{x-n-1}}\right)$$: quindi sarà

$$e^{ay}\int e^{-ay}\cdot\frac{d^{x-n+1}P}{dy^{x-n}}=\frac{d^{x-n+1}.e^{ay}\int e^{-ay}Pdy}{dy^{x-n+1}}, \text{ e}$$

$$Q=\frac{a^{-x+n-1}d^{x-n+1}(e^{ay}\int e^{-ay}Pdy)}{dy^{x-n+1}}-e^{ay}\int e^{-ay}Pdy.$$

Pertanto in luogo dei due termini

$$\frac{d^xF.y}{a^xdy^x}-\Sigma.\frac{a^{-r-1}d^rP}{mdy^r}$$

si può scrivere

$$\frac{d^xF.y}{a^xdy^x}-\frac{1}{a^{x-n+1}}\cdot\frac{d^{x-n+1}.e^{ay}\int e^{-ay}Pdy}{mdy^{x-n+1}}+\frac{e^{ay}\int e^{-ay}Pdy}{m}.$$

Ma salva la generalità si può mettere $F.y$ invece di

$F.y-\frac{a^{n-1}}{m}\cdot\frac{d^{1-n}.e^{ay}\int e^{-ay}Pdy}{dy^{1-n}}$; quindi l'integrale nel caso di P funzione di y sarà

$$z_x=\frac{d^xF.y}{a^xdy^x}+\frac{d^xF'.y}{a'^xdy^x}+\frac{d^xF''.y}{a''^xdy^x}+\text{ec.}$$
$$+\frac{e^{ay}\int e^{-ay}Pdy}{m}+\frac{e^{a'y}\int e^{-a'y}Pdy}{m'}+\text{ec.}$$

Se P_x fosse eguale alla somma di due termini, uno dei quali fosse funzione della sola x, e l'altro della sola y, è chiaro che il valore di z_x corrispondente a questo caso riescirebbe eguale alla somma dei valori ottenuti in questo e nel n.° antecedente. Del resto i resultati, ai quali siamo giunti in questi due ultimi

articoli sono conformi a quelli, che si otterrebbero, se secondo il metodo del n.° 14. al valore di z_x nel caso di $P_x=0$ si aggiungesse un'altro termine u, che fosse funzione della sola x o della sola y, e poi il valore di questo termine u si deducesse dalla equazione a differenze ordinarie finite o infinitesime, nella quale per la sostituzione si cangia la proposta.

21.

Ripigliamo il valore generale di z_x, e vediamo quali modificazioni si debbano ad esso applicare nel caso dell'eguaglianza di due o più delle radici a, a', a'', ec. Ponghiamo essere ω la differenza tra a ed a', in modo che sia $a'=a+\omega$, avremo

$$a'^{-r-1}=a^{-r-1}-(r+1)\omega a^{-r-2}+\frac{(r+1)(r+2)}{2}\omega^2 a^{-r-3}-\text{ec.}$$

e chiamando T_1 la quantità $\frac{T}{(t-a)^a}$ avremo ancora $\frac{1}{m}=-\frac{1}{\omega T_1}$ facendo $t=a$, $\frac{1}{m'}=\frac{1}{\omega T_1}$ facendovi $t=a'=a+\omega$, cioè

$$\frac{1}{m'}=\frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{T_1}+\omega\frac{d.\frac{1}{T_1}}{dt}+\omega^2\frac{d^2.\frac{1}{T_1}}{2dt^2}+\text{ec.}\right)$$ facendovi $t=a$. Sostituiti questi valori i due termini $\frac{a^{-r-1}}{m}+\frac{a'^{-r-1}}{m'}$ diventeranno

$$a^{-r-1}\cdot\frac{d.\frac{1}{T}}{dt}-(r+1)\frac{a^{-r-2}}{T_1}+\omega(A)+\omega^2(B)+\text{ec.}$$

Facendo le medesime sostituzioni nei termini $\frac{d^x F.y}{a^x dy^x}+\frac{d^x F'.y}{a'^x dy^x}$, essi si cangeranno in

$$a^{-x}\cdot\frac{d^x F.y}{dy^x}+a^{-x}\cdot\frac{d^x F'.y}{dy^x}-\omega x a^{-x-1}\cdot\frac{d^x F'.y}{dy^x}+\omega^2\frac{x(x+1)}{2}a^{-x-2}\cdot\frac{d^x F'.y}{dy^x}-\text{ec.}$$

e posto $F.y$ in luogo di $F.y+F'.y$, e $F'.y$ invece di $-\frac{\omega}{a}F'.y$ diventeranno

$$a^{-x} \cdot \frac{d^x F.y}{dy^x} + \left(x\omega \frac{x(x+1)}{2a} + \text{ec.}\right) a^{-x} \cdot \frac{d^x F'.y}{dy^x}.$$

Queste nuove forme sono poco utili, quando le radici a ed a' sono disuguali, perchè invece di un valore finito ci danno una serie infinita; ma diventano utilissime, allorchè le radici a ed a' sono eguali, perchè essendo in tal caso $\omega=0$ si riducono alle semplici espressioni

$$a^{-r-1} \cdot \frac{d.\frac{1}{T_1}}{dt} - (r+1)a^{-r-2} \cdot \frac{1}{T_1},$$

$$a^{-x} \cdot \frac{d^x F.y}{dy^x} + xa^{-x} \cdot \frac{d^x F'.y}{dy^x}.$$

Quindi nel caso di $a'=a$ l'integrale prenderà la forma

$$z_x = \frac{1}{a^x}\left(\frac{d^x F.y}{dy^x} + x\frac{d^x F'.y}{dy^x}\right) + \frac{1}{a''^x} \cdot \frac{d^x F''.y}{dy^x} + \text{ec.}$$

$$-\Sigma\left[a^{-r-1}\left(\frac{d.\frac{1}{T_1}}{dt} - \frac{r+1}{aT_1}\right) + \frac{a''^{-r-1}}{m''} + \text{ec.}\right] \cdot \frac{d^r P_{x-n-r}}{dy^r}.$$

Essendo, come sopra, $a'=a+\omega$ sia $k\omega$ la differenza tra a ed a'', cioè sia $a''=a+k\omega$, e sarà

$$a^{r-r-1} = a^{-r-1} - (r+1)\omega a^{-r-2} + \frac{(r+1)(r+2)}{2}\omega^2 a^{-r-3} - (A)\omega^3 + \text{ec.}$$

$$a''^{-r-1} = a^{-r-1} - (r+1)k\omega a^{-r-2} + \frac{(r+1)(r+2)}{2}k^2\omega^2 a^{-r-3} - (A')k^3\omega^3 + \text{ec.}$$

Posto $T_2 = \frac{T}{(t-a)^3}$ sarà ancora $\frac{1}{m} = \frac{1}{k\omega^2} \cdot \frac{1}{T_2}$ facendovi $t=a$, $\frac{1}{m'} = -\frac{1}{(k-1)\omega^2} \cdot \frac{1}{T_2}$ facendovi $t=a'=a+\omega$, $\frac{1}{m''} = \frac{1}{k(k-1)\omega^2} \cdot \frac{1}{T_2}$ facendovi $t=a''=a+k\omega$, cioè

$$\frac{1}{m}=\frac{1}{k\omega^2}\cdot\frac{1}{T_2}$$

$$\frac{1}{m'}=-\frac{1}{(k-1)\omega^2}\left(\frac{1}{T_2}+\omega\frac{d.\frac{1}{T_2}}{dt}+\omega^2\frac{d^2.\frac{1}{T_2}}{2dt^2}+\omega^3\frac{d^3.\frac{1}{T_2}}{2.3dt^3}+\text{ec.}\right)$$

$$\frac{1}{m''}=\frac{1}{k(k-1)\omega^2}\left(\frac{1}{T_2}+k\omega\frac{d.\frac{1}{T_2}}{dt}+k^2\omega^2\frac{d^2.\frac{1}{T_2}}{2dt^2}+\text{ec.}\right)$$

facendo in tutte quest'espressioni $t=a$. Sostituiti i valori precedenti i tre termini

$$\frac{a^{-r-1}}{m}+\frac{a'^{-r-1}}{m'}+\frac{a''^{-r-1}}{m''}$$

diventeranno

$$a^{-r-1}\left(\frac{d^2.\frac{1}{T_2}}{2dt^2}-(r+1)\frac{d.\frac{1}{T_2}}{dt}+\frac{(r+1)(r+2)}{2}.\frac{1}{T_2}+(B)\omega+(B')\omega^2+\text{ec.}\right).$$

Così pure i termini

$$a^{-x}\frac{d^xF.y}{dy^x}+a'^{-x}\frac{d^xF'.y}{dy^x}+a''^{-x}\frac{d^xF''.y}{dy^x}$$

si cangeranno in

$$a^{-x}\frac{d^xF.y}{dy^x}+\left(1-\frac{x}{a}\omega+\frac{x(x+1)}{2a^2}\omega^2-\frac{x(x+1)(x+2)}{2.3a^3}\omega^3+\text{ec.}\right)a^{-x}\frac{d^xF'.y}{dy^x}$$

$$+\left(1-\frac{kx}{a}\omega+\frac{x(x+1)}{2a^2}k^2\omega^2-\frac{x(x+1)(x+2)}{2.3a^3}k^3\omega^3+\text{ec.}\right)a^{-x}\frac{d^xF''.y}{dy^x}$$

in luogo dei quali potremo porre

$$\frac{1}{a^x}\left(\frac{d^xF.y}{dy^x}+x\frac{d^xF'.y}{dy^x}+\frac{x(x+1)}{2}\frac{d^xF''.y}{dy^x}+(C)\omega+\text{ec.}\right)$$

scrivendo cioè $F.y$ in luogo di $F.y+F'.y+F''.y$, $F'.y$ invece di $-\frac{\omega}{a}F'.y-\frac{k\omega}{a}F''.y$, e $F''.y$ in luogo di $\frac{\omega^2}{a^2}F'.y+\frac{k^2\omega^2}{a^2}F''.y$. Allorchè le tre radici a, a', a'' sono eguali, è $\omega=0$; dunque avremo in tal caso

$$z_x = \frac{1}{a^x}\left(\frac{d^x F.y}{dy^x} + x\frac{d^x F'.y}{dy^x} + \frac{x(x+1)}{2}\frac{d^x F''.y}{dy^x}\right) + \frac{1}{a^{m'x}}\frac{d^x F'''.y}{dy^x} + \text{ec.}$$

$$-\Sigma\left[a^{-r-1}\left(\frac{d^2\frac{1}{T_2}}{2dt^2} - (r+1)\frac{d.\frac{1}{T_2}}{adt} + \frac{(r+1)(r+2)}{2a^2 T_2}\right) + \frac{a'''^{-r-1}}{m'''} + \text{ec.}\right]\frac{d^r P_{x-n-r}}{dy^r}.$$

Si vede chiaramente qual sarà la forma dell'integrale per un maggior numero di radici eguali; come pure è evidente che nel caso, in cui tutte le radici fossero eguali, sarà

$$z_x = \frac{1}{a^x}\left(\frac{d^x F.y}{dy^x} + x\frac{d^x F'.y}{dy^x} \ldots + \frac{x(x+1)\ldots(x+n-2)}{2.3\ldots(n-1)}\frac{d^x F^{(n-1)}.y}{dy^x}\right)$$

$$-\frac{1}{(-a)^{n-1}}\Sigma.a^{-r-1}\cdot\frac{(r+1)(r+2)\ldots(r+n-1)}{2\cdot 3\ldots(n-1)}\cdot\frac{d^r P_{x-n-r}}{dy^r}.$$

22.

Con un metodo simile si potrà trovare l'integrale della equazione

$$\frac{d^n z}{dy^n} + A\frac{d^{n-1}\Delta z}{dy^{n-1}} + B\frac{d^{n-2}\Delta^2 z}{dy^{n-2}} \ldots + N\Delta^n z = P,$$

essendo z e P funzioni di x ed y, e la caratteristica Δ appartenendo alla variabile x. Nel caso di $P=0$ essa è già stata integrata dal sommo Geometra *Laplace* in una sua Memoria sulle serie inserita tra quelle dell'Accademia delle Scienze di Parigi dell'anno 1779, e questo è il solo esempio, che si trovi, di tali integrazioni. Ponghiamo

$$\frac{d^{n-1} z}{dy^{n-1}} + A'\frac{d^{n-2}\Delta z}{dy^{n-2}} + B'\frac{d^{n-3}\Delta^2 z}{dy^{n-3}} \ldots + M'\Delta^{n-1} z = X,$$

e paragonando con la proposta una equazione formata dalla somma del differenziale di questa, e della differenza finita della medesima moltiplicata per una costante $-a$ troveremo

$$(a)\quad \frac{dX}{dy} - a\Delta z = P,$$

essendo data dalla equazione

$$(b)\quad a^n + Aa^{n-1} + Ba^{n-2} \ldots + N = 0 .$$

Ora l'equazione (a) integrata ci dà (16)

$$X = \frac{a^{-x} e^{-ay} d^x . [F.y - \Sigma(a^x \int^{x+1} dy^{x+1} . Pe^{ay})]}{dy^x} .$$

Quindi se chiamiamo a, a', a'', ec. le radici della equazione (b), operando come sopra (18) otterremo

$$\Delta^{n-1} . z = \frac{a^{-x} e^{-ay} d^x . [F.y - \Sigma(a^x \int^{x+1} dy^{x+1} . Pe^{ay})]}{m dy^x}$$

$$+ \frac{a'^{-x} e^{-a'y} d^x . [F'.y - \Sigma(a'^x \int^{x+1} dy^{x+1} . Pe^{a'y})]}{m' dy^x}$$

+ ec.

Adesso osserviamo che a motivo della funzione arbitraria $F.y$ la quantità $\Sigma.a^{-x} \frac{d^x F.y}{dy^x}$ è sempre della forma $a^{-x} \frac{d^x F.y}{dy^x}$: infatti, se poniamo $F.y = \frac{1}{a} \frac{df y}{dy} - f.y$, abbiamo

$$\Sigma.a^{-x} \frac{d^x F.y}{dy^x} = \Sigma.\left(a^{-x-1} \frac{d^{x+1} f.y}{dy^{x+1}} - a^{-x} \frac{d^x f.y}{dy^x}\right) = a^{-x} \frac{d^x f.y}{dy^x} .$$

Sarà pertanto

$$z = a^{-x} e^{-ay} . \frac{d^x F.y}{dy^x} - e^{-ay} \Sigma^{n-1} . \frac{d^x \Sigma(a^x \int^{x+1} dy^{x+1} Pe^{ay})}{m a^x dy^x}$$

$$+ a'^{-x} e^{-a'y} . \frac{d^x F'.y}{dy^x} - e^{-a'y} \Sigma^{n-1} . \frac{d^x \Sigma(a'^x \int^{x+1} dy^{x+1} Pe^{a'y})}{m' a'^x dy^x}$$

+ ec.

L'altro metodo delle integrazioni successive ci condurrebbe ad espressioni troppo complicate, eccettuato il caso, in cui tutte le radici a, a', ec. sono eguali, nel quale si troverà

$$z = \frac{(-1)^n}{a^x e^{ay}} . \frac{d^x \Sigma^n . (a^x \int^{x+n} dy^{x+n} Pe^{ay})}{dy^x} .$$

23.

Se fosse data l'equazione

$$P=\frac{d^n z_x}{dy^n}+A\frac{d^{n-1}(az_{x+1}+bz_x)}{dy^{n-1}}+B\frac{d^{n-2}(a^2z_{x+2}+2abz_{x+1}+b^2z_x)}{dy^{n-2}}$$
$$\ldots\ldots+N\left(a^n z_{x+n}+na^{n-1}bz_{x+n-1}+\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2z_{x+n-2}\ldots+b^n z_x\right),$$

ove a e b sono costanti, essa potrà trattarsi col medesimo metodo, o pure ridursi a quella dell'articolo precedente. A questo effetto facciamo

$$z_x=M_x.Z_x$$
$$az_{x+1}+bz_x=-bM_x\Delta Z_x,$$

e sostituendo nella seconda il valore di z_x preso dalla prima equazione avremo

$$aM_{x+1}.Z_{x+1}+bM_x.Z_x=-bM_xZ_{x+1}+bM_xZ_x,$$

cioè $aM_{x+1}=-bM_x$, ed $M_x=\left(-\frac{b}{a}\right)^x$. Ciò posto l'equazione $az_{x+1}+bz_x=-bM_x.\Delta Z_x$ ci darà $a^2z_{x+2}+2abz_{x+1}+b^2z_x$ $=-abM_{x+1}.\Delta Z_{x+1}-b^2M_x.\Delta Z_x=b^2M_x\Delta^2Z_x$, e similmente $a^3z_{x+3}+3a^2bz_{x+2}+3ab^2z_{x+1}+b^3z_x=ab^2M_{x+1}.\Delta^2Z_{x+1}+b^3M_x.\Delta^2Z_x$ $=-b^3M_x\Delta^3Z_x$, e così in seguito. Pertanto la proposta diventerà

$$\frac{d^nZ_x}{dy^n}-Ab\frac{d^{n-1}\Delta Z_x}{dy^{n-1}}+Bb^2\frac{d^{n-2}\Delta^2Z_x}{dy^{n-2}}\ldots\pm Nb^n\Delta^nZ_x=\left(-\frac{a}{b}\right)^xP,$$

cioè sarà ridotta alla forma della equazione precedente.

24.

Più generalmente proposta una equazione, in cui il primo membro sia una funzione data di x ed y, ed il secondo una funzione lineare di z_x e delle sue differenze, se posto nel secondo membro $a^x e^{\beta y}$ in luogo di z_x la quantità, che ne risulta, di-

visa per $a^x e^{\beta y}$ è risolubile in fattori del primo grado, la proposta si può sempre integrare. Per mostrar ciò con un esempio consideriamo l'equazione del second'ordine

$$P=z_{x+2}+Az_{x+1}+Bz_x+C\frac{dz_x}{dy}+D\frac{dz_{x+1}}{dy}+E\frac{dz^2{}_x}{dy^2},$$

e ponendo nel secondo membro $a^x e^{\beta y}$ in luogo di z_x, e dividendo per $a^x e^{\beta y}$ otterremo la quantità

$$a^2+Aa+B+C\beta+Da\beta+E\beta^2 .$$

Se questa quantità è risolubile nei due fattori $a-p-q\beta$, $a-p'-q'\beta$, è chiaro che ad essa si potrà dare la forma seguente

$$a^2-pa-qa\beta-p'(a-p-q\beta)-q'(a\beta-p\beta-q\beta^2) .$$

Quindi l'equazione proposta sarà della forma

$$P=z_{x+2}-pz_{x+1}-q\frac{dz_{x+1}}{dy}-p'\left(z_{x+1}-pz_x-q\frac{dz_x}{dy}\right)$$
$$-q'\left(\frac{dz_{x+1}}{dy}-p\frac{dz_x}{dy}-q\frac{d^2z_x}{dy^2}\right).$$

Ponghiamo

$$(a)\qquad z_{x+1}-pz_x-q\frac{dz_x}{dy}=X_x$$

e la proposta diventerà

$$X_{x+1}-p'X_x-q'\frac{dX_x}{dy}=P ,$$

la quale integrata ci darà (16)

$$X_x=q'^x e^{-\frac{p'}{q'}y}\cdot\frac{d^x\Sigma.q'^{-x-1}\int^{x+1}dy^{x+1}Pe^{\frac{p'}{q'}y}}{dy^x}.$$

Trovato X_x avremo dalla equazione (a)

$$z_x=q^x e^{-\frac{p}{q}y}\cdot\frac{d^x\Sigma.q^{-x-1}\int^{x+1}dy^{x+1}Pe^{\frac{p}{q}y}}{dy^x}.$$

Se p e q sono in ambedue i fattori i medesimi, sostituendo nel valore di z_x quello di X_x avremo

$$z_x = q^x e^{-\frac{p}{q}y} \cdot \frac{d^x \Sigma^a . q^{-x-2} \int^{x+2} dy^{x+2} P e^{\frac{p}{q}y}}{dy^x} .$$

Il medesimo metodo rinscirà in tutte l'equazioni di una simile forma; e nel caso che tutti i fattori $a-p-q\beta$, $a-p'-q'\beta$, ec. siano eguali, otterremo generalmente

$$z_x = q^x e^{-\frac{p}{q}y} \cdot \frac{d^x \Sigma^n . q^{-x-n} \int^{x+n} dy^{x+n} P e^{\frac{p}{q}y}}{dy^x} ,$$

essendo n il numero dei fattori eguali, o sia l'ordine della proposta.

25.

Fin quì abbiamo considerate l'equazioni tra tre variabili x, y e z; ma i metodi esposti possono applicarsi all'equazioni della medesima forma, che comprendono un più gran numero di variabili. Proponghiamoci in primo luogo l'equazione del prim'ordine tra quattro variabili

$$z_{x+1} = Az_x + B\frac{dz_x}{dy} + C\frac{dz_x}{dt} ,$$

ove i coefficienti A, B, C sono costanti, la quale contiene le differenze parziali della funzione z_x di tre variabili x, y, e t, finite riguardo alla prima, e infinitesime relativamente alle altre due. Ponendo $z_x = a^x e^{\beta y + \gamma t}$ avremo

$$(a) \qquad a = A + B\beta + C\gamma ,$$

cioè $a = B\beta + C\delta$, se facciamo $A + C\gamma = C\delta$. Quindi sarà

$$a^x = B^x\beta^x + xB^{x-1}C\beta^{x-1}\delta + \frac{x(x-1)}{2}B^{x-2}C^2\beta^{x-2}\delta^2 \ldots + C^x\delta^x ,$$

e sostituito questo valore

$$a^x e^{\beta y+\gamma t} = e^{-\frac{A}{C}t} \cdot \left(B^x \frac{d^x . e^{\beta y+\gamma t}}{dy^x} + xB^{x-1}C\frac{d^x . e^{\beta y+\gamma t}}{dy^{x-1}dt} \ldots + C^x\frac{d^x . e^{\beta y+\gamma t}}{dt^x} \right) ;$$

onde usando un ragionamento simile ai precedenti (1) ricaveremo

$$z_x = e^{-\frac{A}{C}t} \cdot \left(B^x \frac{d^x F.(y\ ,\ t)}{dy^x} + xB^{x-1} C \frac{d^x F}{dy^{x-1} dt} \ldots + C^x \frac{d^x F}{dt^x} \right).$$

Il medesimo integrale potrà ottenersi in una forma più semplice espresso, se invece di prendere dalla equazione (a) il valore di α si prenderà quello di β o di γ. Infatti si avrà

$$\beta = \frac{a - A - C\gamma}{B}, \text{ ed } a^x e^{\beta y + \gamma t} = e^{-\frac{A}{B}y} . a^x e^{\frac{a}{B}y + \gamma\left(t - \frac{C}{B}y\right)}$$

$$= e^{-\frac{A}{B}y} B^x a^x e^{ay + \gamma(Bt - Cy)}, \text{ se in luogo di } \alpha \text{ e di } \gamma \text{ si pone } Ba \text{ e } B\gamma.$$

Questa ultima quantità può mettersi sotto la forma $e^{-\frac{A}{B}y} . B^x . \frac{d^x . e^{ay + \gamma(Bt - Cy)}}{dy^x}$, purchè si prendano i differenziali nella supposizione di $Bt - Cy$ costante. Sarà dunque

$$z_x = e^{-\frac{A}{B}y} . B^x . \frac{d^x F.(y\ ,\ t)}{dy^x},$$

ove convien ricordarsi, che dobbiamo prendere i differenziali della funzione $F.(y\ ,\ t)$ nella ipotesi di $Bt - Cy$ costante.

Con un simile ragionamento si troverà, che l'equazione del prim'ordine

$$z_{x+1} = Az_x + B\frac{dz_x}{dy} + C\frac{dz_x}{dt} + D\frac{dz_x}{du} + E\frac{dz_x}{dr} + \text{ec.}$$

tra un numero qualunque di variabili avrà il suo integrale così semplicemente espresso

$$z_x = e^{-\frac{A}{B}y} . B^x . \frac{d^x F.(y\ ,\ t\ ,\ u\ ,\ r\ ,\ \text{ec.})}{dy^x},$$

purchè si facciano le differenziazioni nella ipotesi di $Bt - Cy$, $Bu - Dy$, $Br - Ey$, ec. costanti.

26.

Sia proposta adesso l'equazione del second'ordine

$$z_{x+1}+A\frac{dz_{x+1}}{dy}+B\frac{dz_{x+1}}{dt}=Cz_x+D\frac{dz_x}{dy}+E\frac{dz_x}{dt}.$$

Ponendo $z_x=a^x e^{\beta y+\gamma t}$ avremo

$$a+Aa\beta+Ba\gamma=C+D\beta+E\gamma.$$

Facciamo

$$1+A\beta+B\gamma=(AE-BD)\delta$$
$$C+D\beta+E\gamma=(AE-BD)\theta$$

e ne dedurremo $a=\frac{\theta}{\delta}$, $\beta=E\delta-B\theta+K$, $\gamma=A\theta-D\delta+L$, ove

$K=\frac{BC-E}{AE-BD}$, $L=\frac{D-AC}{AE-BD}$, e sarà

$$a^x e^{\beta y+\gamma t}=\frac{\theta^x}{\delta^x}e^{Ky+Lt+\delta(Ey-Dt)+\theta(At-By)}.$$

Se per più semplicità ponghiamo $Ey-Dt=r$, $At-By=u$, otterremo

$$a^x e^{\beta y+\gamma t}=e^{\frac{r+Cu}{BD-AE}}.\frac{\theta^x}{\delta^x}e^{\delta r+\theta u}=e^{\frac{r+Cu}{BD-AE}}\int^x dr^x.\frac{d^x.e^{\delta r+\theta u}}{du^r}.$$

E siccome in luogo di $e^{\delta r+\theta u}$ si può sostituire una funzione qualunque di r ed u, sarà

$$z_x=e^{\frac{r+Cu}{BD-AE}}\int^x dr^x.\frac{d^x F.(r,u)}{du^x}.$$

Il segno integrale $\int^x dr^x F.(r,u)$ porterà la quantità

$$f.(u,x)+rf.(u,x-1)+\frac{r^2}{2}f.(u,x-2)\ldots+\frac{r^{x-1}}{2.3\ldots(x-1)}f.(u,1);$$

quindi l'integrale completo della proposta sarà

$$z_x = e^{\frac{r+Cu}{BD-AE}} \cdot \frac{d^x f^x dr^x F.(r,u)}{du^x}$$

$$+e^{\frac{r+Cu}{BD-AE}}\left(\frac{d^x f.(x,u)}{du^x} + r\frac{d^x f.(x-1,u)}{du^x} \ldots + \frac{r^{x-1}}{2.3\ldots(x-1)} \cdot \frac{d^x f.(1,u)}{du^x}\right).$$

La medesima equazione può anche trattarsi con un metodo analogo a quello del n.° 13. Prima di tutto osservo, che può rendersi assai più semplice, se si pone $z_x = e^{my+nt} \cdot z'_x$: infatti dopo questa sostituzione diventerà

$$(1+Am+Bn)z'_{x+1} + A\frac{dz'_{x+1}}{dy} + B\frac{dz'_{x+1}}{dt}$$

$$= (C+Dm+En)z'_x + D\frac{dz'_x}{dy} + E\frac{dz'_x}{dt}.$$

Ora essendo le quantità m ed n in nostro arbitrio, potremo prenderle tali, che ne risulti $1+Am+Bn=0$, $C+Dm+En=0$, nel qual caso svanendo i coefficienti di due termini l'equazione sarà

$$A\frac{dz'_{x+1}}{dy} + B\frac{dz'_{x+1}}{dt} = D\frac{dz'_x}{dy} + E\frac{dz'_x}{dt}.$$

Facciamo in questa $x=0$, e ponendo $z'_0 = F.(y,t)$ avremo

$$A\frac{dz'_1}{dy} + B\frac{dz'_1}{dt} = D\frac{dF}{dy} + E\frac{dF}{dt} = u_1;$$

se adesso ponghiamo $x=1$, otterremo

$$A\frac{dz'_2}{dy} + B\frac{dz'_2}{dt} = D\frac{dz'_1}{dy} + E\frac{dz'_1}{dt},$$

e quindi sarà

$$A^2\frac{d^2z'_2}{dy^2} + 2AB\frac{d^2z'_2}{dydt} + B^2\frac{d^2z'_2}{dt^2} = AD\frac{d^2z'_1}{dy^2} + (AE+BD)\frac{d^2z'_1}{dydt}$$

$$+BE\frac{d^2z'_1}{dt^2} = D\frac{du_1}{dy} + E\frac{du_1}{dt} = u_2.$$

Similmente troveremo

$$A^3\frac{d^3z'_3}{dy^3}+3A^2B\frac{d^3z'_3}{dy^2dt}+3AB^2\frac{d^3z'_3}{dydt^2}+B^3\frac{d^3z'_3}{dt^3}$$

$$=A^2D\frac{d^3z'_2}{dy^3}+(2ABD+A^2E)\frac{d^3z'_2}{dy^2dt}+(B^2D+2ABE)\frac{d^3z'_2}{dydt^2}$$

$$+B^2E\frac{d^3z'_2}{dt^3}=D\frac{du_2}{dy}+E\frac{du_2}{dt}=u_3\,.$$

Continuando le medesime operazioni giungeremo finalmente alla trasformata

$$(a)\quad A^x\frac{d^xz'_x}{dy^x}+xA^{x-1}B\frac{d^xz'_x}{dy^{x-1}dt}+\frac{x(x-1)}{2}A^{x-2}B^2\frac{d^xz'_x}{dy^{x-2}dt^2}$$

$$\ldots\ldots\ldots+B^x\frac{d^xz'_x}{dt^x}=u_x$$

ove u_x si deve determinare dalla equazione

$$u_{x+1}=D\frac{du_x}{dy}+E\frac{du_x}{dt}\,,$$

cioè sarà (25)

$$u_x=E^x\frac{d^xF.(y,t)}{dt^x}\,,$$

purchè si facciano le differenziazioni nella ipotesi di $Ey-Dt$ costante. Nella equazione (a) si potrà riguardare x come costante, ed avremo il di lei integrale (Tomo II. n.° 170.)

$$z'_x=\frac{1}{A^x}\int^x dy^x.u_x\,,$$

facendo le integrazioni nella supposizione di $At-By$ costante; le quali espressioni combinano con l'integrale trovato precedentemente.

27.

Passiamo alla equazione generale del second' ordine

$$z_{x+2}=Az_{x+1}+B\frac{dz_{x+1}}{dy}+C\frac{dz_{x+1}}{dt}+Dz_x+E\frac{dz_x}{dy}$$
$$+F\frac{dz_x}{dt}+G\frac{d^2z_x}{dy^2}+H\frac{d^2z_x}{dydt}+I\frac{d^2z_x}{dt^2}.$$

Ponendo $z_x=a^x e^{\beta y+\gamma t}$ e dividendo tutti i termini per $a^x e^{\beta y+\gamma t}$ avremo tra a, β e γ l'equazione

(a) $a^2=Aa+Ba\beta+Ca\gamma+D+E\beta+F\gamma+G\beta^2+H\beta\gamma+I\gamma^2$.

Se da questa equazione deduciamo i valori di a^3, a^4, ec. ponendovi finchè è possibile il valore di a^2 ricavato dalla medesima equazione, troveremo a^x espresso nella forma seguente

$$a^x=a\begin{cases}a_{0,0,x}+a_{1,0,x}\cdot\beta+a_{0,1,x}\cdot\gamma+a_{2,0,x}\cdot\beta^2+a_{1,1,x}\cdot\beta\gamma+a_{0,2,x}\gamma^2\\ +a_{3,0,x}\cdot\beta^3+a_{2,1,x}\cdot\beta^2\gamma+a_{1,2,x}\cdot\beta\gamma^2+a_{0,3,x}\cdot\gamma^3\ \ldots\ldots\ldots\\ +a_{x-1,0,x}\cdot\beta^{x-1}+a_{x-2,1,x}\cdot\beta^{x-2}\gamma\ \ldots\ldots\ldots+a_{0,x-1,x}\cdot\gamma^{x-1}\end{cases}$$
$$+b_{0,0,x}+b_{1,0,x}\cdot\beta+b_{0,1,x}\cdot\gamma+b_{2,0,x}\cdot\beta^2+b_{1,1,x}\beta\gamma+b_{0,2,x}\cdot\gamma^2$$
$$+b_{3,0,x}\cdot\beta^3+b_{2,1,x}\cdot\beta^2\gamma+b_{1,2,x}\cdot\beta\gamma^2+b_{0,3,x}\cdot\gamma^3\ \ldots\ldots\ldots$$
$$+b_{x,0,x}\cdot\beta^x+b_{x-1,1,x}\cdot\beta^{x-1}\gamma+b_{x-2,2,x}\cdot\beta^{x-2}\gamma^2\ \ldots+b_{0,x,x}\cdot\gamma^x$$

Quindi col ragionamento più volte usato dedurremo l'integrale della proposta espresso come segue:

$$z_x = a_{0,0,x}.F.(y,t) + a_{1,0,x}.\frac{dF}{dy} + a_{0,1,x}.\frac{dF}{dt} + a_{2,0,x}.\frac{d^2F}{dy^2} + a_{1,1,x}.\frac{d^2F}{dydt}$$
$$+ a_{0,2,x}.\frac{d^2F}{dt^2} + a_{3,0,x}.\frac{d^3F}{dy^3} + a_{2,1,x}.\frac{d^3F}{dy^2dt} \cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ a_{x-1,0,x}.\frac{d^{x-1}F}{dy^{x-1}} + a_{x-2,1,x}.\frac{d^{x-1}F}{dy^{x-2}dt} \cdots + a_{0,x-1,x}.\frac{d^{x-1}F}{dt^{x-1}}$$
$$+ b_{0,0,x}.F.(y,t) + b_{1,0,x}.\frac{dF}{dy} + b_{0,1,x}.\frac{dF}{dt} + b_{2,0,x}.\frac{d^2F}{dy^2} + b_{1,1,x}.\frac{d^2F}{dydt}$$
$$+ b_{0,2,x}.\frac{d^2F}{dt^2} + b_{3,0,x}.\frac{d^3F}{dy^3} + b_{2,1,x}.\frac{d^3F}{dy^2dt} \cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ b_{x,0,x}.\frac{d^xF}{dy^x} + b_{x-1,1,x}.\frac{d^xF}{dy^{x-1}dt} \cdots\cdots\cdots + b_{0,x,x}.\frac{d^xF}{dt^x},$$

ove $F.(y,t)$, e $F'.(y,t)$ sono due funzioni arbitrarie di y e t.

Per determinare i coefficienti $a_{0,0,x}$, ec. $b_{0,0,x}$, ec. ponghiamo $x+1$ in luogo di x nel valore di a^x, ed avremo

$$a^{x+1} = a\begin{cases} a_{0,0,x+1} \\ +a_{1,0,x+1}.\beta + a_{0,1,x+1}.\gamma + a_{2,0,x+1}.\beta^2 \\ +a_{1,1,x+1}.\beta\gamma + a_{0,2,x+1}.\gamma^2 + \text{ec.} \end{cases}$$
$$+ b_{0,0,x+1} + b_{1,0,x+1}.\beta + b_{0,1,x+1}.\gamma + b_{2,0,x+1}.\beta^2$$
$$+ b_{1,1,x+1}.\beta\gamma + b_{0,2,x+1}.\gamma^2 + \text{ec.}$$

Ma questo valore di a^{x+1} si può ottenere ancora in altra guisa se quello di a^x si moltiplica per a, e poi in luogo di a^2 si sostituisce il suo valore ricavato dalla equazione (a). Sarà dunque

$$a^{x+1} = (A + B\beta + C\gamma)a\begin{cases} a_{0,0,x} + a_{1,0,x}.\beta + a_{0,1,x}.\gamma \\ +a_{2,0,x}.\beta^2 + a_{1,1,x}.\beta\gamma + \text{ec.} \end{cases}$$
$$+ a\begin{cases} b_{0,0,x} + b_{1,0,x}.\beta + b_{0,1,x}.\gamma + b_{2,0,x}.\beta^2 + b_{1,1,x}.\beta\gamma \\ +b_{0,2,x}.\gamma^2 + b_{3,0,x}.\beta^3 + b_{2,1,x}.\beta^2\gamma + b_{1,2,x}.\beta\gamma^2 + \text{ec.} \end{cases}$$
$$+ (D + E\beta + F\gamma + G\beta^2 + H\beta\gamma + I\gamma^2)\begin{cases} a_{0,0,x} + a_{1,0,x}.\beta \\ +a_{0,1,x}.\gamma + \text{ec.} \end{cases}$$

Siccome questi due valori di a^{x+1} devono essere identici, pa-

ragonando insieme i coefficienti dei termini a , $a\beta$, $a\gamma$, $a\beta^2$, ec. avremo

$$a_{0,0,x+1} = Aa_{0,0,x} + b_{0,0,x}$$
$$a_{m,0,x+1} = Aa_{m,0,x} + Ba_{m-1,0,x} + b_{m,0,x}$$
$$a_{0,n,x+1} = Aa_{0,n,x} + Ca_{0,n-1,x} + b_{0,n,x}$$
$$(e)\quad a_{m,n,x+1} = Aa_{m,n,x} + Ba_{m-1,n,x} + Ca_{m,n-1,x} + b_{m,n,x}$$

le quali equazioni si vede esser tutte comprese nella quarta, se si osserva che $a_{m,n,x}$ è $=0$, quando m o n è un numero negativo.

Similmente paragonando ne' due valori di a^{x+1} i coefficienti dei termini β , γ , β^2 , $\beta\gamma$, γ^2 , ec. otterremo in generale l'equazione

$$(f)\quad b_{m,n,x+1} = Da_{m,n,x} + Ea_{m-1,n,x} + Fa_{m,n-1,x} + Ga_{m-2,n,x} + Ha_{m-1,n-1,x} + Ia_{m,n-2,x}$$

purchè si rifletta, che $a_{m,n,x}$ è $=0$, quando uno dei numeri m o n è negativo.

L'equazione (e) ci darà il valore di $b_{m,n,x}$ subito che sarà trovato quello di $a_{m,n,x}$: sostituendo poi il valore di $b_{m,n,x}$ nella equazione (f) avremo

$$a_{m,n,x+2} = Aa_{m,n,x+1} + Ba_{m-1,n,x+1} + Ca_{m,n-1,x+1} + Da_{m,n,x} + Ea_{m-1,n,x} + Fa_{m,n-1,x} + Ga_{m-2,n,x} + Ha_{m-1,n-1,x} + Ia_{m,n-2,x}$$

equazione a differenze finite, l'integrazione della quale ci darà il valore di $a_{m,n,x}$. Anche indipendentemente da questa equazione si potrà trovare con altri metodi il valore di $a_{m,n,x}$; sopra di che si può vedere la citata Memoria di *Lagrange*.

28.

Se nella proposta mancasse il termine z_{x+2} , cioè se essa fosse della forma

$$z_{x+1}+A\frac{dz_{x+1}}{dy}+B\frac{dz_{x+1}}{dt}=Cz_x+D\frac{dz_x}{dy}+E\frac{dz_x}{dt}+F\frac{d^2z_x}{dy^2}+G\frac{d^2z_x}{dydt}+H\frac{d^2z_x}{dt^2},$$

non si potrebbe adoprare il metodo precedente. In questo caso ponghiamo $z_x=e^{-\frac{y}{A}}.z'_x$, e l'equazione diventerà

$$A\frac{dz'_{x+1}}{dy}+B\frac{dz'_{x+1}}{dt}=C'z'_x+D'\frac{dz'_x}{dy}+E'\frac{dz'_x}{dt}+F\frac{d^2z'_x}{dy^2}+G\frac{d^2z'_x}{dydt}+H\frac{d^2z'_x}{dt^2},$$

essendo $C'=C-\frac{D}{A}+\frac{E}{A^2}$, $D'=D-\frac{2F}{A}$, $E'=E-\frac{G}{A}$. Adesso in luogo di t introduciamo la variabile $u=At-By$, in modo che z'_x diventi funzione di x, y, ed u, ed osservando che in luogo di $\frac{dz_x}{dt}$ si deve porre $\frac{dz'_x}{du}.\frac{du}{dt}=A\frac{dz'_x}{du}$, e $\frac{dz'_x}{dy}+\frac{dz'_x}{du}.\frac{du}{dy}=\frac{dz'_x}{dy}-B\frac{dz'_x}{du}$ in luogo di $\frac{dz'_x}{dy}$, avremo

$$(a)\quad A\frac{dz'_{x+1}}{dy}=C'z'_x+D'\frac{dz'_x}{dy}+E''\frac{dz'_x}{du}+F\frac{d^2z'_x}{dy^2}+G'\frac{d^2z'_x}{dydu}+H'\frac{d^2z'_x}{du^2},$$

ove $E''=AE'-BD'$, $G'=AG-2BF$, $H'=A^2H-ABG+B^2F$.

Si faccia $z'_x=\int^x dy^x z''_x$, e l'equazione precedente si cangerà in

$$Az''_{x+1}=C'z''_x+D'\frac{dz''_x}{dy}+E''\frac{dz''_x}{du}+F\frac{d^2z''_x}{dy^2}+G'\frac{d^2z''_x}{dydu}+H'\frac{d^2z''_x}{du^2}.$$

Ora ponendo $z''_x = a^x e^{\beta y + \gamma u}$ avremo

$$Aa = C' + D'\beta + E''\gamma + F\beta^2 + G'\beta\gamma + H'\gamma^2 ,$$

e qu' di

$$a^x = \frac{1}{A^x}(C' + D'\beta + E''\gamma + F\beta^2 + G'\beta\gamma + H'\gamma^2)^x .$$

Se svolgiamo questo valore di a^x nella forma

$$a_{0,0} + a_{1,0}.\beta + a_{0,1}.\gamma + a_{2,0}\beta^2 + a_{1,1}.\beta\gamma + a_{0,2}.\gamma^2$$
$$\ldots + a_{2x,0}.\beta^{2x} + a_{2x-1,1}.\beta^{2x-1}.\gamma \ldots + a_{0,2x}.\gamma^{2x}$$

otterremo

$$z''_x = a_{0,0}.F.(y,u) + a_{1,0}.\frac{dF}{dy} + a_{0,1}.\frac{dF}{du} + a_{2,0}.\frac{d^2F}{dy^2} \ldots .$$
$$\ldots + a_{2x,0}.\frac{d^{2x}F}{dy^{2x}} + a_{2x-1,1}.\frac{d^{2x}F}{dy^{2x-1}du} \ldots + a_{0,2x}.\frac{d^{2x}F}{du^{2x}} .$$

Il segno sommatorio $\int^x dy^x . z''_x$ porterà la quantità

$$\frac{y^{x-1}}{2.3\ldots(x-1)} f_{1,x,u} + \frac{y^{x-2}}{2\ldots(x-2)} f_{2,x,u} \ldots\ldots + f_{x,x,u}$$

e per determinare la funzione $f_{n,x,u}$ si dovrà porre questa quantità in luogo di z'_x nella equazione (a). Fatta la sostituzione il paragone dei termini simili ci darà

$$Af_{1,x+1} = C'f_{1,x} + E''\frac{df_{1,x}}{du} + H'\frac{d^2f_{1,x}}{du^2}$$

$$Af_{2,x+1} = C'f_{2,x} + E''\frac{df_{2,x}}{du} + H'\frac{d^2f_{2,x}}{du^2} + D'f_{1,x} + G'\frac{df_{1,x}}{du}$$

e generalmente

$$Af_{n,x+1} = C'f_{n,x} + E''\frac{df_{n,x}}{du} + H'\frac{d^2f_{n,x}}{du^2}$$
$$+ D'f_{n-1,x} + G'\frac{df_{n-1,x}}{du} + Ff_{n-2,x} .$$

Questa equazione è di un genere diverso da quello, che quì si

contempla, poichè la differenza di due variabili n ed x è finita, e della terza u infinitesima, e della di lei integrazione parleremo in seguito.

29.

Per l'integrazione della equazione

$$z_{x+1}+A\frac{dz_{x+1}}{dy}+B\frac{dz_{x+1}}{dt}=Cz_x+D\frac{dz_x}{dy}+E\frac{dz_x}{dt}+F\frac{d^2z_x}{dy^2}+G\frac{d^2z_x}{dydt}+H\frac{d^2z_x}{dt^2}$$

si può anche usare il metodo seguente, che è generalmente applicabile all'equazioni della medesima forma di un ordine più elevato. Facciamo $z_0=\phi.(y,t)$, e ponendo nella proposta $x=0$ avremo

$$z_1+A\frac{dz_1}{dy}+B\frac{dz_1}{dt}=C\phi.(y,t)+D\frac{d\phi}{dy}+E\frac{d\phi}{dt}+F\frac{d^2\phi}{dy^2}+G\frac{d^2\phi}{dydt}+H\frac{d^2\phi}{dt^2}=u_1.$$

Similmente, se facciamo $x=1$, otterremo

$$z_2+A\frac{dz_2}{dy}+B\frac{dz_2}{dt}+A\frac{d\left(z_2+A\frac{dz_2}{dy}+B\frac{dz_2}{dt}\right)}{dy}+B\frac{d\left(z_2+A\frac{dz_2}{dy}+B\frac{dz_2}{dt}\right)}{dt}=C\left(z_1+A\frac{dz_1}{dy}+B\frac{dz_1}{dt}\right)+D\frac{d\left(z_1+A\frac{dz_1}{dy}+B\frac{dz_1}{dt}\right)}{dy}+E\frac{d\left(z_1+A\frac{dz_1}{dy}+B\frac{dz_1}{dt}\right)}{dt}+F\frac{d^2\left(z_1+A\frac{dz_1}{dy}+B\frac{dz_1}{dt}\right)}{dy^2}+G\frac{d^2\left(z_1+A\frac{dz_1}{dy}+B\frac{dz_1}{dt}\right)}{dydt}+H\frac{d^2\left(z_1+A\frac{dz_1}{dy}+B\frac{dz_1}{dt}\right)}{dt^2};$$

e se ponghiamo questa equazione sotto la forma

$$z_2+a\frac{dz_2}{dy}+a'\frac{dz_2}{dt}+a''\frac{d^2z_2}{dy^2}+a'''\frac{d^2z_2}{dydt}+a^{IV}\frac{d^2z_2}{dt^2}=u_2$$

avremo

$$1+am+a'n+a''m^2+a'''mn+a^{IV}n^2=(1+Am+Bn)^2,$$

$$u_2=Cu_1+D\frac{du_1}{dy}+E\frac{du_1}{dt}+F\frac{d^2u_1}{dy^2}+G\frac{d^2u_1}{dydt}+H\frac{d^2u_1}{dt^2}.$$

Così pure, se nella proposta ponghiamo $x=2$, ne dedurremo

$$z_3+A\frac{dz_3}{dy}+B\frac{dz_3}{dt}+a\frac{d\left(z_3+A\frac{dz_3}{dy}+B\frac{dz_3}{dt}\right)}{dy}$$

$$+a'\frac{d\left(z_3+A\frac{dz_3}{dy}+B\frac{dz_3}{dt}\right)}{dt}+a''\frac{d^2\left(z_3+A\frac{dz_3}{dy}+B\frac{dz_3}{dt}\right)}{dy^2}$$

$$+a'''\frac{d^2\left(z_3+A\frac{dz_3}{dy}+B\frac{dz_3}{dt}\right)}{dydt}+a^{IV}\frac{d^2\left(z_3+A\frac{dz_3}{dy}+B\frac{dz_3}{dt}\right)}{dt^2}$$

$$=Cu_2+D\frac{du_2}{dy}+E\frac{du_2}{dt}+F\frac{d^2u_2}{dy^2}+G\frac{d^2u_2}{dydt}+H\frac{d^2u_2}{dt^2},$$

la qual'equazione se si pone sotto la forma

$$z_3+\beta\frac{dz_3}{dy}+\beta'\frac{dz_3}{dt}+\beta''\frac{d^2z_3}{dy^2}+\beta'''\frac{d^2z_3}{dydt}+\beta^{IV}\frac{d^2z_3}{dt^2}$$

$$+\beta^V\frac{d^2z_3}{dy^2}+\beta^{VI}\frac{d^2z_3}{dy^2dt}+\beta^{VII}\frac{d^2z_3}{dydt^2}+\beta^{VIII}\frac{d^2z_3}{dt^3}=u_3;$$

sarà la quantità

$$1+\beta m+\beta'n+\beta''m^2+\beta'''mn+\beta^{IV}n^2+\beta^Vm^3+\beta^{VI}m^2n+\beta^{VII}mn^2+\beta^{VIII}n^3$$
$$=(1+am+a'n+a''m^2+a'''mn+a^{IV}n^2)(1+Am+Bn)=(1+Am+Bn)^3.$$

Continuando le medesime operazioni giungeremo finalmente alla trasformata

$$(a)\quad z_x+e\frac{dz_x}{dy}+e'\frac{dz_x}{dt}+e''\frac{d^2z_x}{dy^2}+e'''\frac{d^2z_x}{dydt}+e^{IV}\frac{d^2z_x}{dt^2}+\text{ec.}=u_x,$$

ove i coefficienti sono tali, che rendono la quantità

$1+\alpha m+\alpha' n+\alpha'' m^2+\alpha''' mn+\alpha^{IV} n^2+\text{ec.}=(1+Am+Bn)^{\varpi}$,

e per determinare u_x abbiamo l'equazione

$$u_{x+1}=Cu_x+D\frac{du_x}{dy}+E\frac{du_x}{dt}+F\frac{d^2u_x}{dy^2}+G\frac{d^2u_x}{dydt}+H\frac{d^2u_x}{dt^2},$$

per mezzo della quale col metodo del n.° 25. potremo esprimere u_x per la funzione $\phi(y,t)$, e per i differenziali di essa relativamente ad y e t.

Trovata u_x l'equazione (*a*) integrata (Tomo II. n.° 170.) ci darà

$$z_x=\frac{e^{-\frac{y}{A}}}{A^x}\int^x dy^x.e^{\frac{y}{A}}u_x,$$

purchè si prendano quest'integrali nella ipotesi di $At-By$ costante. Col metodo esposto in quest'articolo si potrà sempre ridurre l'integrazione di qualunque equazione della forma, che abbiamo considerata, alla integrazione di una equazione a differenze parziali infinitesime.

30.

Passiamo adesso a considerare quell'equazioni, nelle quali la differenza di due variabili x ed y è finita, e della terza t infinitesima. Rappresenti $z_{x,y}$ una funzione di x, y e t, e prendiamo in primo luogo a trattare l'equazione del prim'ordine

$$z_{x+1,y}=Az_{x,y}+Bz_{x,y+1}+C\frac{dz_{x,y}}{dt},$$

ove i coefficienti sono costanti. Per integrarla facciamo $z_{x,y}=\alpha^x\beta^\gamma e^{\gamma t}$, ed avremo $\alpha=A+B\beta+C\gamma=B\beta+C\delta$, se poniamo $A+C\gamma=C\delta$, cioè $\gamma=\delta-\frac{A}{C}$. Sarà dunque

$$\alpha^x=B^x\beta^x+xB^{x-1}C\beta^{x-1}\delta+\frac{x(x-1)}{2}B^{x-2}C^2\beta^{x-2}\ldots+C^x\delta^x,$$

e siccome $z_{x,y}=\alpha^x\beta^y e^{\gamma t}=\alpha^x\beta^y e^{\left(\delta-\frac{A}{C}\right)t}$, avremo

$$z_{x,y}=e^{-\frac{A}{C}t}\left(B^x\beta^{x+y}e^{\delta t}+xB^{x-1}C\frac{d.\beta^{x+y-1}e^{\delta t}}{dt}\ldots+C^x\frac{d^x.\beta^y e^{\delta t}}{dt^x}\right),$$

onde col ragionamento più volte usato dedurremo l'integrale completo

$$z_{x,y}=e^{-\frac{A}{C}t}\left(B^x F.(x+y,t)+xB^{x-1}C\frac{d.F.(x+y-1,t)}{dt}\ldots+C^x\frac{d^x F.(y,t)}{dt^x}\right).$$

L'istesso integrale può ottenersi espresso in un modo più semplice. Ripigliamo l'equazione $\alpha=B\beta+C\delta$, e ponghiamo $B\beta=-C\omega\delta$, sarà $\alpha=-C\delta(\omega-1)$, e quindi avremo

$$\alpha^x\beta^y e^{\gamma t}=e^{-\frac{A}{C}t}.\frac{(-C)^{x+y}}{B^y}.\delta^{x+y}(\omega-1)^x.\omega^y e^{\delta t}$$

$$=e^{-\frac{A}{C}t}.\frac{(-C)^{x+y}}{B^y}.\frac{d^{x+y}\Delta'^x.\omega^y e^{\delta t}}{dt^{x+y}},$$

onde ricaveremo l'integrale cercato

$$z_{x,y}=e^{-\frac{A}{C}t}.\frac{(-C)^{x+y}}{B^y}.\frac{d^{x+y}\Delta'^x F.(y,t)}{dt^{x+y}},$$

ove Δ' rappresenta la differenza finita per rapporto ad y.

Possiamo anche porre $\alpha=C\omega\delta$, ed avremo $\beta=\frac{C}{B}\delta(\omega-1)$, e col medesimo discorso troveremo

$$z_{x,y}=e^{-\frac{A}{C}t}.\frac{C^{x+y}}{B^y}.\frac{d^{x+y}\Delta^y f.(x,t)}{dt^{x+y}}.$$

31.

Consideriamo adesso l'equazione del second'ordine

$$z_{x+1,y}+Az_{x+1,y+1}+B\frac{dz_{x+1,y}}{dt}=Cz_{x,y}+Dz_{x,y+1}+E\frac{dz_{x,y}}{dt}.$$

Ponendo $z_{x,y}=a^x\beta^y e^{\gamma t}$ avremo $a=\frac{C+D\beta+E\gamma}{1+A\beta+B\beta}$, e facendo $1+B\gamma=B\delta$, e $C-\frac{E}{B}=K$, sarà $a=\frac{K+D\beta+E\delta}{A\beta+B\delta}$. Se adesso poniamo $A\beta=-B\omega\delta$, avremo $\beta=-\frac{B}{A}\omega\delta$, ed $a=\frac{K+\delta(E-L\omega)}{-B\delta(\omega-1)}$, ove $L=\frac{BD}{A}$. Di nuovo facciamo $E-L\omega=-E(\omega'-1)$, ed otterremo $\omega=\frac{E}{L}\omega'$, $\beta=-\frac{BE}{AL}\omega'\delta$, ed $a=\frac{K-E\delta(\omega'-1)}{B\delta\left(\frac{E}{L}\omega'-1\right)}$. Sarà pertanto

$$a^x\beta^y e^{\gamma t}=\frac{(-B)^y}{A^y(-B)^x}e^{-\frac{t}{B}}\cdot\frac{[K-E\delta(\omega'-1)]^x\cdot\frac{E^y}{L^y}\omega'^y e^{\delta t}}{\delta^{x-y}\left(\frac{E}{L}\omega'-1\right)^x}.$$

Ma la quantità $\frac{[K-E\delta(\omega'-1)]^x\cdot\frac{E^y}{L^y}\omega'^y e^{\delta t}}{\delta^{x-y}\left(\frac{E}{L}\omega'-1\right)^x}$, svolto in serie il binomio $[K-E\delta(\omega'-1)]^x$, diventa

$$\frac{\left[K^x-xK^{x-1}E\delta(\omega'-1)+\frac{x(x-1)}{2}K^{x-2}E^2\delta^2(\omega'-1)^2\ldots\pm E^x\delta^x(\omega'-1)^x\right]\frac{E^y}{L^y}\omega'^y e^{\delta t}}{\delta^{x-y}\left(\frac{E}{L}\omega'-1\right)^x},$$

e questa formola si può mettere sotto la forma

$$\frac{d^{y-x}\Sigma'^x\cdot\frac{E^y}{L^y}\left(K^x\omega'^y e^{\delta t}-xK^{x-1}E\frac{d\Delta'^y\omega'^y e^{\delta t}}{dt}\ldots\pm E^x\frac{d^x\Delta'^x\omega'^y e^{\delta t}}{dt^x}\right)}{dt^{y-x}},$$

ove le caratteristiche Δ' e Σ' si riferiscono alla variabile y. Se

dunque facciamo z_x eguale a questa ultima quantità, dopo di averla moltiplicata per $\frac{(-B)^\gamma}{A^\gamma(-B)^x}e^{-\frac{t}{B}}$, e di aver posto in luogo di $\omega'^\gamma e^{\delta t}$ una funzione qualunque arbitraria di γ e t, avremo l'integrale della proposta.

Ora si osservi che la formola

$$K^x F.(\gamma,t)-xK^{x-1}E\frac{d\Delta' F}{dt}+\frac{x(x-1)}{2}K^{x-2}E^2\frac{d^2\Delta'^2 F}{dt^2}\ldots\pm E^x\frac{d^x\Delta'^x F}{dt^x}$$

si può ridurre ad una forma assai più concisa. Facciamola infatti $=Q_{x,\gamma}$, ed avremo

$$Q_{x+1,\gamma}=K^{x+1}F.(\gamma,t)-(x+1)K^xE\frac{d\Delta' F}{dt}+\frac{(x+1)x}{2}K^{x-1}E^2\frac{d^2\Delta'^2 F}{dt^2}+\text{ec.}$$

$$\frac{d\Delta' Q_{x,\gamma}}{dt}=K^x\frac{d\Delta' F}{dt}-xK^{x-1}E\frac{d^2\Delta'^2 F}{dt^2}+\text{ec.}$$

Quindi apparisce, che sarà

$$Q_{x+1,\gamma}=KQ_{x,\gamma}-E\frac{d\Delta' Q_{x,\gamma}}{dt}.$$

Per integrare questa equazione ponghiamo $Q_{x,\gamma}=\alpha^x\beta^\gamma e^{\gamma t}$, ed avremo $\alpha=K-E(\beta-1)\gamma$, il qual valore di α diventa $\alpha=K-E\omega+E\gamma$, se si fà $\beta\gamma=\omega$. Di nuovo ponghiamo $K+E\gamma=E\delta$, ed $\omega=\omega'\delta$, ed avremo

$\alpha=-E\delta(\omega'-1)$, $\beta=\frac{\omega'\delta}{\delta-\frac{K}{E}}$, e quindi

$$\alpha^x\beta^\gamma e^{\gamma t}=\frac{(-E)^x\delta^{x+\gamma}(\omega'-1)^x.\omega'^\gamma e^{\left(\delta-\frac{K}{E}\right)t}}{\left(\delta-\frac{K}{E}\right)^\gamma},$$ la qual quantità

si può mettere sotto la forma

$(-E)^x \int^y dt^y . e^{-\frac{K}{E}t} . \frac{d^{x+y} \Delta'^x a'^y e^{\delta t}}{dt^{x+y}}$. Pertanto il valore di $Q_{x,y}$ sarà

$$Q_{x,y} = (-E)^x \int^y dt^y . e^{-\frac{K}{E}t} . \frac{d^{x+y} \Delta'^x \phi.(y.t)}{dt^{x+y}},$$

e l'integrale della proposta

$$z_{x,y} = \frac{(-B)^y E^x}{A^y B^x} e^{-\frac{t}{B}} . \frac{d^{y-x} \Sigma'^x . \frac{E^y}{L^y} \int^y dt^y . e^{-\frac{K}{E}t} . \frac{d^{x+y} \Delta'^x \phi.(y.t)}{dt^{x+y}}}{dt^{y-x}}.$$

3a.

Questa forma d'integrale cessa di essere utile, quando alcuna delle qnantità A, B, D, ed E è eguale a zero; e per trovare la forma conveniente bisogna applicare i medesimi artifizj alla equazione tra α, β, e γ, che corrisponde a ciascuno di questi casi. Sia primieramente $A=0$, e ponendo $z_{x,y} = \alpha^x \beta^y e^{\gamma t}$, e poi $1+B\gamma = B\delta$, e $K = C - \frac{E}{B}$ avremo $\alpha = \frac{K + D\beta + E\delta}{B\delta}$, e quindi facendo $D\beta = -(K+E\delta)\alpha$, otterremo $\beta = \frac{(K+E\delta)\alpha}{-D}$, $\alpha = \frac{(K+E\delta)(\alpha-1)}{-B\delta}$; onde sarà

$$\alpha^x \beta^y e^{\gamma t} = \frac{(-E)^{x+y}}{B^y D^x} e^{-\left(\frac{1}{B} + \frac{K}{E}\right)t} . \frac{\left(\delta + \frac{K}{E}\right)^{x+y} (\alpha-1)^x e^{\left(\delta + \frac{K}{E}\right)t}}{\delta^x},$$

la qual quantità si può mettere sotto la forma

$$\frac{(-E)^{x+y}}{B^y D^x} e^{-\left(\frac{1}{B} + \frac{K}{E}\right)t} . \frac{d^{x+y} \left(e^{\frac{K}{E}t} \int^x dt^x \Delta'^x \alpha^y e^{\delta t}\right)}{dt^{x+y}}.$$

Quindi prendendo una funzione arbitraria di y e t in luogo di $\alpha^y e^{\delta t}$ avremo

$$z_{x,y}=\frac{(-E)^{x+y}}{B^y D^x}e^{-\frac{C}{E}t}\cdot\frac{d^{x+y}[e^{\frac{K}{E}t}\int^x dt^x \Delta'^x F.(y,t)]}{dt^{x+y}}.$$

Sia in secondo luogo $B=0$, e la sostituzione $z_{x,y}=a^x\beta^y e^{\gamma t}$ ci darà $a=\frac{C+D\beta+E\gamma}{1+A\beta}$. Si ponga $C+E\gamma=E\delta$, $A\beta=-\alpha$, e sarà $\gamma=\delta-\frac{C}{E}$, $\beta=-\frac{\alpha}{A}$, ed $a=\frac{\frac{D}{A}\alpha-E\delta}{\alpha-1}$. Facciamo adesso $\frac{D}{A}\alpha=E\delta\alpha'$, e chiamando M la quantità $\frac{AE}{D}$ avremo $\alpha=M\delta\alpha'$, $\beta=-\frac{M\delta\alpha'}{A}$, ed $a=\frac{E\delta(\alpha'-1)}{M\delta\alpha'-1}$. Quindi sarà

$$a^x\beta^y e^{\gamma t}=\frac{E^x}{(-A)^y}e^{-\frac{C}{E}t}\cdot\frac{M^y\delta^{x+y}(\alpha'-1)^x\alpha'^y e^{\delta t}}{(M\delta\alpha'-1)^x},$$

il qual valore si può mettere sotto la forma

$$\frac{E^x}{(-A)^y}e^{-\frac{C}{E}t}\Sigma'^x\cdot\left(M^y\frac{d^{x+y}\Delta'^x\alpha'^y e^{\delta t}}{dt^{x+y}}\right),\text{ e perciò}$$

$$z_{x,y}=\frac{E^x}{(-A)^y}e^{-\frac{C}{E}t}\Sigma'^x\left(\frac{A^y E^y}{D^y}\cdot\frac{d^{x+y}\Delta'^x F.(y,t)}{dt^{x+y}}\right).$$

Nel terzo caso di $D=0$ ponendo $z_{x,y}=a^x\beta^y e^{\gamma t}$, e poi $1+B\gamma=B\delta$, e $K=C-\frac{E}{B}$ avremo $a=\frac{K+E\delta}{A\beta+B\delta}$, e quindi facendo $A\beta=-B\alpha\delta$ otterremo $\beta=-\frac{B}{A}\alpha\delta$, ed $a=\frac{K+E\delta}{-B(\alpha-1)}$; onde sarà

$$a^x\beta^y e^{\gamma t}=\frac{(-B)^{y-x}.E^x}{A^y}e^{-\left(\frac{1}{B}+\frac{K}{E}\right)t}\cdot\frac{\left(\delta+\frac{K}{E}\right)^x\delta^{y-x}\alpha^y e^{\left(\delta+\frac{K}{E}\right)t}}{(\alpha-1)^x},$$

la qual quantità posta sotto la forma

$$\frac{(-B)^{\gamma-x}.E^x}{A^\gamma}e^{-\frac{C}{E}t}.\frac{d^x.(e^{\frac{K}{E}t}d^{\gamma-x}\Sigma'^x{}_\varepsilon{}^\gamma e^{\delta t})}{dt^\gamma}$$

ci fà conoscere l'integrale della proposta essere

$$z_{x,\gamma}=\frac{(-B)^{\gamma-x}.E^x}{A^\gamma}e^{-\frac{C}{E}t}.\frac{d^x\,[e^{\frac{K}{E}t}d^{\gamma-x}\Sigma'^x F.(\gamma,t)]}{dt^\gamma}.$$

Sia finalmente $E=0$, ed avremo tra α, β, e γ l'equazione $\alpha=\frac{C+D\beta}{1+A\beta+B\gamma}$. Facciamo $1+B\gamma=B\delta$, $D\beta=-C\varepsilon$, e chiamando N la quantità $\frac{AC}{D}$ ne dedurremo $\gamma=\delta-\frac{1}{B}$, $\beta=-\frac{C\varepsilon}{D}$, $\alpha=\frac{-C(\varepsilon-1)}{B\delta-N\varepsilon}$. Di nuovo ponendo $N\varepsilon=B\varepsilon'\delta$ otterremo

$$\beta=-\frac{BC\varepsilon'\delta}{DN},\ \alpha=\frac{C\left(\frac{B\varepsilon'\delta}{N}-1\right)}{B\delta(\varepsilon'-1)},\text{ e quindi}$$

$$\alpha^x\beta^\gamma e^{\gamma t}=\frac{C^{x+\gamma}}{B^x(-D)^\gamma}e^{-\frac{t}{B}}.\frac{\left(\frac{B\varepsilon'\delta}{N}-1\right)^x.\frac{B^\gamma}{N^\gamma}\delta^{\gamma-x}\varepsilon'^\gamma e^{\delta t}}{(\varepsilon'-1)^x},$$

il qual valore posto sotto la forma

$$\frac{C^{x+\gamma}}{B^x(-D)^\gamma}e^{-\frac{t}{B}}\Delta'^x.\frac{d^{\gamma-x}.\frac{B^\gamma}{N^\gamma}\Sigma'^x\varepsilon'^\gamma e^{\delta t}}{dt^{\gamma-x}}\text{ ci darà}$$

$$z_{x,\gamma}=\frac{C^{x+\gamma}}{B^x(-D)^\gamma}e^{-\frac{t}{B}}\Delta'^x.\frac{B^\gamma D^\gamma d^{\gamma-x}\Sigma'^x F.(\gamma,t)}{A^\gamma C^\gamma dt^{\gamma-x}}.$$

Se E ed A fossero nel medesimo tempo $=0$, fermandoci ai valori di α e β in δ ed ε avremmo

$\alpha^x\beta^y e^{\gamma t}=\frac{(-C)^{x+y}}{B^x D^y}\cdot\frac{(\alpha-1)^x\alpha^y e^{\left(\delta-\frac{1}{B}\right)t}}{\delta^x}$; donde facilmente si ricava

$$z_{x,y}=\frac{(-C)^{x+y}}{B^x D^y}e^{-\frac{t}{B}}\int^x dt^x\Delta'^x F.(y,t)\,.$$

Nella stessa maniera si troverà la forma conveniente dell'integrale, quando due o più dei coefficienti A, B, D ed E sono insieme eguali a zero.

33.

Quest'equazioni si possono anche trattare con un altro metodo. Consideriamo la più generale del num.° 31., ma rendiamola prima più semplice ponendovi $z_{x,y}=e^{-\frac{t}{B}}.z'_{x,y}$, sostituito il qual valore essa diventerà

$$Az'_{x+1,y+1}+B\frac{dz'_{x+1,y}}{dt}=Kz'_{x,y}+Dz'_{x,y+1}+E\frac{dz_{x,y}}{dt}\,,$$

ove $K=C-\frac{E}{B}$. Sia $z'_{0,y}=F.(y,t)$, e posto $x=0$ sarà

$$Az'_{1,y+1}+B\frac{dz'_{1,y}}{dt}=KF.(y,t)+DF.(y+1,t)+E\frac{dF.(y,t)}{dt}=u_{1,y}$$

Similmente facendo $x=1$ avremo

$$Az'_{2,y+1}+B\frac{dz'_{2,y}}{dt}=Kz'_{1,y}+Dz'_{1,y+1}+E\frac{dz_{1,y}}{dt}\,;$$

onde si deduce

$$A^2z'_{2,y+2}+2AB\frac{dz'_{2,y+1}}{dt}+B^2\frac{d^2z'_{2,y}}{dt^2}$$

$$=K\left(Az'_{1,y+1}+B\frac{dz'_{1,y}}{dt}\right)+D\left(Az'_{1,y+2}+B\frac{dz'_{1,y+1}}{dt}\right)$$

$$+E\left(A\frac{dz'_{1,y+1}}{dt}+B\frac{d^2z'_{1,y}}{dt}\right)=Ku_{1,y}+Du_{1,y+1}+E\frac{du_{1,y}}{dt}=u_{2,y}.$$

Nella medesima maniera troveremo, facendo $x=2$,

$$A^3 z'_{3,y+3} + 3A^2 B \frac{dz'_{3,y+2}}{dt} + 3AB^2 \frac{d^2 z'_{3,y+1}}{dt^2} + B^3 \frac{d^3 z'_{3,y}}{dt^3} = u_{3,y},$$

ove sarà

$$u_{3,y} = Ku_{2,y} + Du_{2,y+1} + E\frac{du_{2,y}}{dt},$$

e generalmente

$$(a)\quad A^x z'_{x,y+x} + xA^{x-1} B \frac{dz'_{x,y+x-1}}{dt} \ldots + B^x \frac{d^x z'_{x,y}}{dt^x} = u_{x,y},$$

essendo $u_{x,y}$ determinata dalla equazione

$$u_{x+1,y} = Ku_{x,y} + Du_{x,y+1} + E\frac{du_{x,y}}{dt},$$

la quale ci dà (30)

$$u_{x,y} = e^{-\frac{K}{E}t} \cdot \frac{(-E)^{x+y}}{D^y} \cdot \frac{d^{x+y} \Delta'^x \phi.(y,t)}{dt^{x+y}}.$$

Nella equazione (*a*) si può considerare x come costante, ed il di lei integrale sarà (17)

$$z'_{x,y} = \frac{(-B)^y}{A^y (-B)^x} \cdot \frac{d^y \Sigma'^x \cdot \frac{A^y}{(-B)^y} \int^{x+y} dt^{x+y} . u_{x,y}}{dt^y},$$

il quale combina con l'altro ottenuto precedentemente.

34.

Perchè il valore trovato di $z'_{x,y}$ sia completo, converrà aggiungervi quella quantità, che introduce il segno Σ'^x, cioè

$$\frac{(-B)^{\gamma}}{A^{\gamma}(-B)^{x}}\left\{\begin{array}{l}\frac{\gamma(\gamma-1)\ldots(\gamma-x+2)}{2.3\ldots(x-1)}\cdot\frac{d^{\gamma-x}f_{1,x}}{dt^{\gamma-x}}+\frac{\gamma\ldots(\gamma-x+3)}{2\ldots(x-2)}\cdot\frac{d^{\gamma-x}f_{2,x}}{dt^{\gamma-x}}\\ +\frac{\gamma\ldots(\gamma-x+4)}{2\ldots(x-3)}\cdot\frac{d^{\gamma-x}f_{3,x}}{dt^{\gamma-x}}\ldots\ldots\ldots+\frac{d^{\gamma-x}f_{x,x}}{dt^{\gamma-x}}\end{array}\right.$$

e per determinare la funzione $f_{n,x}$ converrà sostituire questa quantità nella equazione data in luogo di z'_x. Ma prima si osservi che

$$\frac{(\gamma+r)(\gamma+r-1)\ldots(\gamma+r-s)}{2.3\ldots(s+1)}=\frac{(\gamma+r-1)(\gamma+r-2)\ldots(\gamma+r-s-1)}{2.3\ldots(s+1)}+\frac{(\gamma+r-1)(\gamma+r-2)\ldots(\gamma+r-s-1)}{2.3\ldots s}.$$

Posto ciò, facendo la sostituzione, e ponendo, come sopra, $\frac{BD}{A}=L$ avremo

$$0=\frac{\gamma(\gamma-1).\ldots(\gamma-x+2)}{2.3\ldots(x-1)}\cdot\frac{d^{\gamma-x}}{dt^{\gamma-x}}\left(f_{1,x+1}-Kf_{1,x}+(L-E)\frac{df_{1,x}}{dt}\right)$$

$$+\frac{\gamma\ldots(\gamma-x+3)}{2\ldots(x-2)}\cdot\frac{d^{\gamma-x}}{dt^{\gamma-x}}\left(f_{2,x+1}-Kf_{2,x}(+L-E)\frac{df_{2.x}}{dt}+L\frac{df_{1,x}}{dt}\right)$$

$$+\frac{\gamma\ldots(\gamma-x+4)}{2\ldots(x-3)}\cdot\frac{d^{\gamma-x}}{dt^{\gamma-x}}\left(f_{3,x+1}-Kf_{3,x}+(L-E)\frac{df_{3.x}}{dt}+L\frac{df_{2.x}}{dt}\right)$$

$+$ ec.

Siccome questa equazione dev'essere identica, qualunque sia γ, e la funzione $f_{n,x}$ non contiene γ, dal paragone dei termini simili otterremo

$$(b)\quad f_{1,x+1}-Kf_{1,x}+(L-E)\frac{df_{1.x}}{dt}=0$$

$$f_{n,x+1}-Kf_{n,x}+(L-E)\frac{df_{n.x}}{dt}+L\frac{df_{n-1,x}}{dt}.$$

A questa ultima equazione si riduce quella contemplata nel terzo caso del num.° 32., se ivi si pone $x=n-1$, $y=x$, $A=-\frac{1}{K}$, $B=\frac{E-L}{K}$, $C=0$, ed $E=\frac{L}{K}$; onde sarà

$$f_{n,x}=(E-L)^{x-n+1}.L^{n-1}.\frac{d^{n-1}.\left[e^{\frac{Kt}{L-E}}d^{x-n+1}\Sigma^{n-1}\phi.(x,t)\right]}{dt^{x}}.$$

Sostituiamo il valore di $f_{1,x}$ dato da questa formola nella equazione (b), ed avremo $\phi.(x+1,t)=\phi.(x,t)$, cioè sarà $\phi.(x,t)$ una funzione di t senza x, e perciò $\Sigma^{n-1}\phi.(x,t)$ sarà della forma

$$\Psi_{n,t}+x\Psi_{n-1,t}+\frac{x(x-1)}{2}\Psi_{n-2,t}\ldots+\frac{x(x-1)\ldots(x-n+2)}{2.3\ldots(n-1)}\Psi_{1,t},$$

e siccome n si deve prendere da $n=1$ fino ad $n=x$, verrà ad introdursi nel valore di $z_{x,y}$ una funzione arbitraria di x e t, lo che era necessario per rendere quell'integrale completo.

35.

Sia adesso proposta l'equazione generale del second'ordine

$$z_{x+2}=Az_{x+1,y}+Bz_{x+1,y+1}+C\frac{dz_{x+1,y}}{dt}+Dz_{x,y}+Ez_{x,y+1}$$
$$+F\frac{dz_{x,y}}{dt}+Gz_{x,y+2}+H\frac{dz_{x,y+1}}{dt}+I\frac{d^2z_{x,y}}{dt^2}.$$

Ponendo $z_{x,y}=\alpha^x\beta^y e^{\gamma t}$ avremo

$$\alpha^2=(A+B\beta+C\gamma)\alpha+D+E\beta+F\gamma+G\beta^2+H\beta\gamma+I\gamma^2;$$

e se per mezzo di questa equazione svolgeremo il valore di α^x nella forma seguente

$$a^x = a \begin{cases} a_{0,0,x} + a_{1,0,x}\cdot\beta + a_{0,1,x}\cdot\gamma + a_{2,0,x}\cdot\beta^2 + a_{1,1,x}\cdot\beta\gamma + a_{0,2,x}\cdot\gamma^2 \\ + a_{3,0,x}\cdot\beta^3 + a_{2,1,x}\cdot\beta^2\gamma + a_{1,2,x}\cdot\beta\gamma^2 + a_{0,3,x}\cdot\gamma^3 \ldots\ldots\ldots \\ + a_{x-1,0,x}\cdot\beta^{x-1} + a_{x-2,1,x}\cdot\beta^{x-2}\gamma \ldots\ldots + a_{0,x-1,x}\cdot\gamma^{x-2} \end{cases}$$

$$+ b_{0,0,x} + b_{1,0,x}\cdot\beta + b_{0,1,x}\cdot\gamma + b_{2,0,x}\cdot\beta^2 + b_{1,1,x}\cdot\beta\gamma + b_{0,2,x}\cdot\gamma^2$$
$$+ b_{3,0,x}\cdot\beta^3 + b_{2,1,x}\cdot\beta^2\gamma + b_{1,2,x}\cdot\beta\gamma^2 + b_{0,3,x}\cdot\gamma^3 \ldots\ldots\ldots$$

$$+ b_{x,0,x}\cdot\beta^x + b_{x-1,1,x}\cdot\beta^{x-1}\gamma \ldots\ldots\ldots + b_{0,x,x}\cdot\gamma^x ,$$

chiamando $F.y$ e $F'.y$ due funzioni arbitrarie di y e t otterremo l'integrale completo della proposta,

$$z_{x,y} = a_{0,0,x}\cdot F.y + a_{1,0,x}\cdot F.(y+1) + a_{0,1,x}\cdot\frac{dF.y}{dt} + a_{2,0,x}\cdot F.(y+2)$$
$$+ a_{1,1,x}\cdot\frac{dF.(y+1)}{dt} + a_{0,2,x}\cdot\frac{d^2F.y}{dt^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ a_{x-1,0,x}\cdot F.(y+x-1) + a_{x-2,1,x}\cdot\frac{d.F.(y+x-2)}{dt} \ldots + a_{0,x-1,x}\frac{d^{x-1}F.y}{dt^{x-1}}$$

$$+ b_{0,0,x}\cdot F'.y + b_{1,0,x}\cdot F'.(y+1) + b_{0,1,x}\cdot\frac{dF'.y}{dt} + b_{2,0,x}\cdot F'.(y+2)$$
$$+ b_{1,1,x}\cdot\frac{dF'.(y+1)}{dt} + b_{0,2,x}\cdot\frac{d^2F'.y}{dt^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ b_{x,0,x}\cdot F.(y+x) + b_{x-1,1,x}\cdot\frac{dF'.(y+x-1)}{dt} \ldots\ldots + b_{0,x,x}\cdot\frac{d^xF'.y}{dt^x} ,$$

ed i coefficienti $a_{0,0,x}$, $b_{0,0,x}$, ec. si determineranno come sopra (27). In luogo di svolgere il valore di a^x si potrà egualmente prendere quello di β^y, e si giungerà in una simile maniera all'integrale della equazione proposta.

36.

Ma se mancassero insieme i due termini $z_{x+2,y}$ e $z_{x,y+2}$, questo metodo non potrebbe adoprarsi, e converrebbe servirsi del seguente. Sia adunque proposta l'equazione

$$z_{x+1,y}+Az_{x+1,y+1}+B\frac{dz_{x+1,y}}{dt}=Cz_{x,y}+Dz_{x,y+1}+E\frac{dz_{x,y}}{dt}$$
$$+F\frac{dz_{x,y+1}}{dt}+G\frac{d^2z_{x,y}}{dt^2}.$$

Posta $x=0$, sarà $z_{0,y}$ una funzione di y e t, che chiameremo $F.y$, e la proposta ci darà

$$z_{1,y}+Az_{1,y+1}+B\frac{dz_{1,y}}{dt}=CF.y+DF.(y+1)+E\frac{dF.y}{dt}$$
$$+F\frac{dF.(y+1)}{dt}+G\frac{d^2Fy}{dt^2}=u_{1,y}.$$

Così pure, se facciamo $x=1$, avremo

$$z_{2,y}+Az_{2,y+1}+B\frac{dz_{2,y}}{dt}=Cz_{1,y}+Dz_{1,y+1}+E\frac{dz_{1,y}}{dt}$$
$$+F\frac{dz_{1,y+1}}{dt}+G\frac{d^2z_{1,y}}{dt^2}$$

donde si deduce

$$z_{2,y}+Az_{2,y+1}+B\frac{dz_{2,y}}{dt}+A\left(z_{2,y+1}+Az_{2,y+2}+B\frac{dz_{2,y+1}}{dt}\right)$$
$$+B\left(\frac{dz_{2,y}}{dt}+A\frac{dz_{2,y+1}}{dt}+B\frac{d^2z_{2,y}}{dt^2}\right)=Cu_{1,y}+Du_{1,y+1}+E\frac{du_{1,y}}{dt}$$
$$+F\frac{du_{1,y+1}}{dt}+G\frac{d^2u_{1,y}}{dt^2}=u_{2,y};$$

posta la qual'equazione sotto la forma

$$z_{2,y}+az_{2,y+1}+a'\frac{dz_{2,y}}{dt}+a''z_{2,y+2}+a'''\frac{dz_{2,y+1}}{dt}+a^{IV}\frac{d^2z_{2,y}}{dt^2}=u_{2,y}$$

sarà la quantità

$$1+am+a'n+a''m^2+a'''mn+a^{IV}n^2,=(1+Am+Bn)^2.$$

Continuando le medesime operazioni giungeremo finalmente alla trasformata

$$(a)\quad z_{x,y}+az_{x,y+1}+a'\frac{dz_{x,y}}{dt}+a''z_{x,y+2}+a'''\frac{dz_{x,y+1}}{dt}+\text{ec.}=u_{x,y},$$

ove sarà

$$1+\varphi m+\varphi' n+\varphi'' m^2+\varphi''' mn+\text{ec.}=(1+Am+Bn)^x,$$

e per determinare $u_{x,y}$ avremo l'equazione

$$u_{x+1,y}=Cu_{x,y}+Du_{x,y+1}+E\frac{du_{x,y}}{dt}+F\frac{du_{x,y+1}}{dt}+G\frac{d^2u_{x,y}}{dt^2},$$

la quale s'integra col metodo del n.° antecedente, ed il valore di $u_{x,y}$ conterrà una funzione arbitraria di y e t.

Nella equazione (a) si può riguardare x come costante, e se la paragoniamo con quella, che abbiamo considerata al n.° 24., avremo il di lei integrale così espresso,

$$z_{x,y}=\frac{(-B)^{y-x}}{A^y}e^{-\frac{t}{B}}\cdot\frac{d^{y-x}\Sigma^x\left(-\frac{A}{B}\right)^y\int^y dt^y e^{\frac{t}{B}}u_{x,y}}{dt^{y-x}}.$$

A questo valore di $z_{x,y}$, perchè sia completo, conviene aggiungere la quantità

$$\frac{(-B)^{y-x}}{A^y}e^{-\frac{t}{B}}\cdot\begin{cases}\frac{y(y-1)\ldots(y-x+2)}{2.3\ldots(x-1)}\cdot\frac{d^{y-x}f_{1,x}}{dt^{y-x}}+\frac{y\ldots(y-x+3)}{2\ldots(x-2)}\cdot\frac{d^{y-x}f_{2,x}}{dt^{y-x}}\\ +\frac{y\ldots(y-x+4)}{2\ldots(x-3)}\cdot\frac{d^{y-x}f_{3,x}}{dt^{y-x}}\ldots\ldots\ldots+\frac{d^{y-x}f_{x,x}}{dt^{y-x}}\end{cases}$$

e per determinare la funzione $f_{n,x}$ si sostituirà questa quantità in luogo di $z_{x,y}$ nella equazione proposta. Fatto ciò si troverà

$$f_{1,x+1}=A'f_{1,x}+B'\frac{df_{1,x}}{dt}+C'\frac{d^2f_{1,x}}{dt^2}$$

$$f_{n,x+1}=A'f_{n,x}+B'\frac{df_{n,x}}{dt}+C'\frac{d^2f_{n,x}}{dt^2}+D'\frac{df_{n-1,x}}{dt}+E'\frac{d^2f_{n-1,x}}{dt^2},$$

ove $A'=C-\frac{E}{B}+\frac{G}{B^2}$, $B'=E-\frac{BD}{A}+\frac{F}{A}-\frac{2G}{B}$, $C'=G-\frac{BF}{A}$,

$D'=\frac{F-BD}{A}$, $E'=-\frac{BF}{A}$. Questa ultima equazione è del terz' ordine, e per integrarla si potranno usare i metodi precedenti. Ma siccome il calcolo và divenendo sempre più complicato, porremo quì fine a queste ricerche; e piuttosto passeremo a dir qualche cosa di quell'equazioni, nelle quali i coefficienti non sono costanti.

37.

Consideriamo in primo luogo l'equazione

$$z_{x+1}=Az_x+B\frac{dz_x}{dy}+C\frac{dz_x}{dt}+P,$$

ove A, B, e C siano quantità costanti, e P funzione di x, y, e t. Ponendo in luogo di t un'altra variabile, che sia funzione di y e t, in modo che le quantità z_x, e P diventino funzioni di x, y, ed u, che chiameremo respettivamente Z_x e P', avremo

$$z_{x+1}=Z_{x+1}\ ,\ \frac{dz_x}{dy}=\frac{dZ_x}{dy}+\frac{dZ_x}{du}\cdot\frac{du}{dy}\ ,\ \frac{dz_x}{dt}=\frac{dZ_x}{du}\cdot\frac{du}{dt}\ ;$$ sostituiti i quali valori la proposta diventerà

$$Z_{x+1}=AZ_x+B\frac{dZ_x}{dy}+\left(B\frac{du}{dy}+C\frac{du}{dt}\right)\frac{dZ_x}{du}+P'.$$

Per determinare u facciamo

$$B\frac{du}{dy}+C\frac{du}{dt}=0,$$

ed integrando questa equazione avremo $u=\phi.(Bt-Cy)$; ma poichè non abbiamo bisogno che di un valore particolare di u, prenderemo $u=Bt-Cy$. Ammesso questo valore di u la proposta diventerà

$$Z_{x+1}=AZ_x+B\frac{dZ_x}{dy}+P',$$

nella quale si può riguardare u come costante, ed il di lei integrale sarà (16)

$$Z_x=e^{-\frac{A}{B}y}.B^x\left(\frac{d^xF.(y,u)}{dy^x}+\frac{d^x\Sigma.(B^{-x-1}\int^{x+1}dy^{x+1}P'e^{\frac{A}{B}y})}{dy^x}\right)$$

38.

Più generalmente si potrà integrare l'equazione

$$Az_{x+1}=Bz_x+\frac{dz_x}{dy}+C\frac{dz_x}{dt}+P,$$

ove sia A funzione di x, B e C funzioni di y e t, e P funzione di x, y e t. Sia M il moltiplicatore, che rende integrabile la differenziale $dt-Cdy$, e si abbia $\int M(dt-Cdy)=u$. Introduciamo in luogo di t questa nuova variabile u, in modo che z_x diventi una funzione di x, y ed u che chiameremo Z_x, e B e P si cangino respettivamente in B' e P'. Fatte queste sostituzioni la proposta diventerà

$$AZ_{x+1}=B'Z_x+\frac{dZ_x}{dy}+P'.$$

In essa si può rignardare u come costante, ed il di lei integrale è perciò (16)

$$Z_x=e^{-\int B'dy-\Sigma\log.A}\cdot\frac{d^xF.(y,u)}{dy^x}$$

$$+e^{-\int B'dy-\Sigma\log.A}\cdot\frac{d^x\Sigma(e^{\Sigma\log.A}\int^{x+1}dy^{x+1}P'e^{\int B'dy})}{dy^x}$$

39.

Passando a quell'equazioni nelle quali la differenza di due variabili x ed y è finita, e della terza t infinitesima, consideriamo in primo luogo la seguente

$$z_{x+1,y}=z_{x,y+1}-a\frac{dz_{x,y}}{dt}+P,$$

ove a è costante, e P funzione di x, y e t. Siccome abbiamo veduto (30) che, quando $P=0$, è

$z_{x,y}=a^{x+y}\frac{d^{x+y}\Delta^xF.(y,t)}{dt^{x+y}}$, ponghiamo nel caso nostro più generale una funzione $Z_{x,y}$ di x, y e t invece di $F.(y,t)$,

cioè sostituiamo nella proposta in luogo di $z_{x,y}$ la quantità

$$a^{x+y}\cdot\frac{d^{x+y}\Delta'^{x}Z_{x,y}}{dt^{x+y}},$$ ed avremo

$$a^{x+y+1}\cdot\frac{d^{x+y+1}\Delta'^{x+1}Z_{x+1,y}}{dt^{x+y+1}}=a^{x+y+1}\cdot\frac{d^{x+y+1}\Delta'^{x}Z_{x,y+1}}{dt^{x+y+1}}$$
$$-a^{x+y+1}\cdot\frac{d^{x+y+1}\Delta'^{x}Z_{x,y}}{dt^{x+y+1}}+P,$$

la quale manifestamente si riduce alla forma

$$\frac{d^{x+y+1}\Delta'^{x+1}Z_{x+1,y}}{dt^{x+y+1}}=\frac{d^{x+y+1}\Delta'^{x+1}Z_{x,y}}{dt^{x+y+1}}+\frac{P}{a^{x+y+1}}$$

Da questa integrando più volte relativamente a t e ad y ricaveremo

$$Z_{x+1,y}-Z_{x,y}=\Delta Z_{x}=\Sigma'^{x+1}\cdot\frac{1}{a^{x+y+1}}\int^{x+y+1}dt^{x+y+1}P,$$

e di nuovo integrando per rapporto ad x avremo

$$Z_{x,y}=F.(y,t)+\Sigma\Sigma'^{x+1}\cdot\frac{1}{a^{x+y+1}}\int^{x+y+1}dt^{x+y+1}P.$$

Pertanto l'integrale della proposta sarà

$$z_{x,y}=a^{x+y}\cdot\frac{d^{x+y}\Delta'^{x}F.(y,t)}{dt^{x+y}}$$
$$+a^{x+y}\cdot\frac{d^{x+y}\Delta'^{x}\Sigma\Sigma'^{x+1}.a^{-x-y-1}\int^{x+y+1}dt^{x+y+1}P}{dt^{x+y}}.$$

40.

All'equazione precedente si potrà ridurre la più generale

$$az_{x+1,y}+bcz_{x,y}=z_{x,y+1}+c\frac{dz_{x}}{dt}+P,$$

ove a, b, c, P sono respettivamente funzioni di x, di t, di $x+y$, e di x, y, t. Ponghiamo $z_{x,y}=z'_{x,y}.z''_{x,y}$, ove $z'_{x,y}$ e $z''_{x,y}$ sono ambedue funzioni di x, y, e t, e sostituendo avremo

$$o=az'_{x+1,y}.z''_{x+1,y}+bcz'_{x,y}.z''_{x,y}-z'_{x,y+1}.z''_{x,y+1}$$
$$-cz'_{x,y}.\frac{dz''_{x,y}}{dt}-cz''_{x,y}.\frac{dz'_{x,y}}{dt}-P.$$

Facciamo adesso

$$(a)\quad bz'_{x,y}-\frac{dz'_{x,y}}{dt}=o$$

$$(b)\quad z'_{x,y+1}-cz'_{x,y}=o$$

$$(c)\quad az'_{x+1,y}-z'_{x,y+1}=o$$

ed otterremo

$$z''_{x+1,y}=z''_{x,y+1}+\frac{dz''_{x,y}}{dt}+\frac{P}{z'_{x,y+1}},$$

che abbiamo integrata nel n.° antecedente. Per determinare $z'_{x,y}$ abbiamo dalla equazione (a) $z'_{x,y}=e^{\int bdt}F.(x,y)$, e sostituito questo valore la (b) diventa $F.(x,y+1)=cF.(x,y)$, e quindi abbiamo $F.(x,y)=e^{\Sigma'\log.c}.\phi.x$; e dalla equazione (c) ricaveremo $\phi.x=e^{-\Sigma\log.a}$. Sarà dunque $z'_{x,y}=e^{\int bdt+\Sigma'\log.c-\Sigma\log.a}$, o sia più semplicemente, poichè c è funzione di $x+y$, sarà $z'_{x,y}=e^{\int bdt+\Sigma.\log.\frac{c}{a}}$.

41.

Passiamo adesso a vedere l'uso delle ricerche, sulle quali ci siamo fin qui trattenuti, nella Teoria delle serie. E primieramente proponghiamoci di trovar la somma della serie infinita

$$\int^x dy^x F.(y,t) + bx\int^{x+1} dy^{x+1} \cdot \frac{dF}{dt} + b^2\frac{x(x+1)}{2}\int^{x+2} dy^{x+2} \cdot \frac{d^2F}{dt^2} + \text{ec.}$$

ove b è una quantità costante. Facendo questa somma $=z_x$ avremo

$$\frac{dz_{x+1}}{dy} = \int^x dy^x F + b(x+1)\int^{x+1} dy^{x+1} \cdot \frac{dF}{dt} + b^2\frac{(x+1)(x+2)}{2}\int^{x+2} dy^{x+2} \cdot \frac{d^2F}{dt^2} + \text{ec.}$$

$$\frac{dz_{x+1}}{dt} = \int^{x+1} dy^{x+1} \cdot \frac{dF}{dt} + b(x+1)\int^{x+2} dy^{x+2} \cdot \frac{d^2F}{dt^2} + \text{ec.}$$

Quindi per la relazione, che esiste tra i coefficienti del binomio $1-b$ inalzato alla potenza $-x$, otterremo l'equazione

$$\frac{dz_{x+1}}{dy} - b\frac{dz_{x+1}}{dt} = z_x ,$$

dalla integrazione della quale dipende la somma della serie proposta. Facciamo $z_x = a^x e^{\beta y + \gamma t}$, e sostituendo questo valore avremo $\alpha\beta - b\alpha\gamma = 1$, cioè $\beta = \frac{1}{a} + b\gamma$, ed

$$\gamma^x e^{\beta y + \gamma t} = a^x e^{\frac{1}{a}y + \gamma(t+by)} = \int^x dy^x \cdot e^{\frac{1}{a}y + \gamma(t+by)} ,$$

purchè si prendano gl'integrali supponendo $t+by$ costante: quindi pel ragionamento più volte usato sarà nella medesima ipotesi $z_x = \int^x dy^x f.(y,t)$. Facendo $x=0$ abbiamo $z_0 = F.(y,t) = f.(y,t)$, e di qui nasce il teorema: la serie proposta è eguale al suo primo termine $\int^x dy^x F.(y,t)$, purchè si facciano le integrazioni nella ipotesi di $t+by$ costante.

Questo singolare risultato si può confermare nel modo seguente. Abbiamo, com'è noto, integrando per parti

$$\int^x dy^x \phi = \frac{1}{2.3\ldots(x-1)}\Big\{ y^{x-1}\int dy\phi - (x-1)y^{x-2}\int y dy\phi + \frac{(x-1)(x-2)}{2}\int y^2 dy\phi$$
$$\ldots\ldots\ldots \pm (x-1)y\int y^{x-2} dy\phi \mp \int y^{x-1} dy\phi$$

e ponendo $x+1$ in luogo di x

$$\int^{x+1} dy^{x+1}\phi = \frac{1}{2.3...x}\left\{ \begin{array}{l} y^x \int dy\phi - xy^{x-1}\int y dy\phi + \frac{x(x-1)}{2}\int y^2 dy\phi \\ \quad\ldots\ldots\ldots \mp xy\int y^{x-1} dy\phi \pm \int y^x dy\phi \end{array}\right.$$

$$= \frac{1}{2.3...x}(y^x \int dy\phi - (x-1)y^{x-1}\int y dy\phi ... \mp y\int y^{x-1} dy\phi)$$

$$- \frac{1}{2.3...x}(y^{x-1}\int y dy\phi - (x-1)y^{x-2}\int y^2 dy\phi ... \mp \int y^x dy\phi)$$

$$= \frac{y}{x}\int^x dy^x \phi - \frac{1}{x}\int^x dy^x . y\phi .$$

Ciò posto sarà

$$x\int^{x+1} dy^{x+1} . \frac{dF}{dt} = y\int^x dy^x . \frac{dF}{dt} - \int^x dy^x . y\frac{dF}{dt} ,$$

$$\frac{x(x+1)}{2}\int^{x+2} dy^{x+2} . \frac{d^2F}{dt^2} = \frac{xy}{2}\int^{x+1} dy^{x+1} . \frac{d^2F}{dt^2} - \frac{x}{2}\int^{x+1} dy^{x+1} . y\frac{d^2F}{dt^2}$$

$$= \frac{y^2}{2}\int^x dy^x . \frac{d^2F}{dt^2} - y\int^x dy^x . y\frac{d^2F}{dt^2} + \frac{1}{2}\int^x dy^x . y^2\frac{d^2F}{dt^2} ,$$

$$\frac{x(x+1)(x+2)}{2.3}\int^{x+3} dy^{x+3} . \frac{d^3F}{dt^3} = \frac{y^3}{2.3}\int^x dy^x . \frac{d^3F}{dt^3} - \frac{y^2}{2}\int^x dy^x . y\frac{d^3F}{dt^3}$$

$$+ \frac{y}{2}\int^x dy^x . y^2\frac{d^3F}{dt^3} - \frac{1}{2.3}\int^x dy^x . y^3\frac{d^3F}{dt^3} ,$$

e così in seguito. Sostituendo questi valori in quello di z_x avremo

$$z_x = \int^x dy^x . \left(F.(y,t) - by\frac{dF}{dt} + \frac{b^2y^2}{2}\frac{d^2F}{dt^2} - \frac{b^3y^3}{2.3}\frac{d^3F}{dt^3} + \text{ec.}\right)$$

$$+ by\int^x dy^x . \left(\frac{dF}{dt} - by\frac{d^2F}{dt^2} + \frac{b^2y^2}{2}\frac{d^3F}{dt^3} - \text{ec.}\right)$$

$$- \frac{b^2y^2}{2}\int^x dy^x . \left(\frac{d^2F}{dt^2} - by\frac{d^3F}{dt^3} + \text{ec.}\right)$$

$$+ \text{ec.}$$

e se riflettiamo che

$$F.(y,t) - by\frac{dF}{dt} + \frac{b^2y^2}{2}\frac{d^2F}{dt^2} - \text{ec.} = F.(y, t-by) ,$$

otterremo

$$z_x = \int^x dy^x F.(y, t-by) + by\int^x dy^x . \frac{dF.(y, t-by)}{t}$$

$$+ \frac{b^2y^2}{2}\int^x dy^x . \frac{d^2F.(y, t-by)}{dt^2} + \text{ec.}$$

Di qui apparisce che sarà z_x eguale a ciò, che diviene la quantità $\int^x dy^x F.(y\ ,\ t-by)$, se dopo le integrazioni vi si porrà $t+by$ in luogo di t; o sia sarà $z_x=\int^x dy^x F.(y\ ,\ t)$, purchè si facciano le integrazioni nella supposizione di $t+by$ costante. Infatti per eseguire le integrazioni in questa ipotesi, bisogna nella funzione $F.(y, t)$ porre $t+by=$ ad una costante c, cioè $t=c-by$, poi fatte le integrazioni mettere di nuovo nel resultato in luogo di c il suo valore $t+by$.

42.

Col medesimo metodo si trova la somma della serie infinita

$$\int^x dy^x F.(y,t,u)+bP_{1,x}\int^{x+1}dy^{x+1}\cdot\frac{dF}{dt}+b^2P_{2,x}\int^{x+2}dy^{x+2}\cdot\frac{d^2F}{dt^2}+\text{ec.}$$
$$+cP_{1,x}\int^{x+1}dy^{x+1}\cdot\frac{dF}{du}+2bcP_{2,x}\int^{x+2}dy^{x+2}\cdot\frac{d^2F}{dtdu}+\text{ec.}$$
$$+c^2P_{2,x}\int^{x+2}dy^{x+2}\cdot\frac{d^2F}{du^2}+\text{ec.}$$

essendo come sopra $1+bP_{1,x}+b^2P_{2,x}+\text{ec.}=(1-b)^{-x}$, e b e c costanti. Facendo la serie data $=z_x$ avremo

$$\frac{dz_{x+1}}{dy}=\int^x dy^x F+bP_{1,x+1}\int^{x+1}dy^{x+1}\cdot\frac{dF}{dt}+b^2P_{2,x+1}\int^{x+2}dy^{x+2}\cdot\frac{d^2F}{dt^2}+\text{ec.}$$
$$+cP_{1,x+1}\int^{x+1}dy^{x+1}\cdot\frac{dF}{du}+2bcP_{2,x+1}\int^{x+2}dy^{x+2}\cdot\frac{d^2F}{dtdu}+\text{ec.}$$
$$+c^2P_{2,x+1}\int^{x+2}dy^{x+2}\cdot\frac{d^2F}{du^2}+\text{ec.}$$

$$\frac{dz_{x+1}}{dt}=\int^{x+1}dy^{x+1}\cdot\frac{dF}{dt}+bP_{1,x+1}\int^{x+2}dy^{x+2}\cdot\frac{d^2F}{dt^2}+\text{ec.}$$
$$+cP_{1,x+1}\int^{x+2}dy^{x+2}\cdot\frac{d^2F}{dtdu}+\text{ec.}$$

$$\frac{dz_{x+1}}{du}=\int^{x+1}dy^{x+1}\cdot\frac{dF}{du}+bP_{1,x+1}\int^{x+2}dy^{x+2}\cdot\frac{d^2F}{dtdu}+\text{ec.}$$
$$+cP_{1,x+1}\int^{x+2}dy^{x+2}\cdot\frac{d^2F}{du^2}+\text{ec.}$$

e ponendo mente alla relazione, che regna tra le quantità $1, P_{1,x}, P_{2,x}$, ec., la quale è espressa dalla equazione $P_{n,x+1} - P_{n-1,x+1} = P_{n,x}$, otterremo

$$\frac{dz_{x+1}}{dy} - b\frac{dz_{x+1}}{dt} - c\frac{dz_{x+1}}{du} = z_x .$$

Per integrare questa ultima equazione facciamo $z_x = a^x e^{\beta y+\gamma t+\delta u}$, ed avremo $a\beta - ba\gamma - ca\delta = 1$, cioè $\beta = \frac{1}{a} + b\gamma + c\delta$, e quindi $a^x e^{\beta y+\gamma t+\delta u}$

$= a^x e^{\frac{y}{a}+\gamma(t+by)+\delta(u+cy)} = \int^x dy^x . e^{\frac{y}{a}+\gamma(t+by)+\delta(u+cy)}$, ove si devono prendere gl'integrali nella supposizione di $t+by$, ed $u+cy$ costanti. E ponendo in luogo di $e^{\frac{y}{a}+\gamma(t+by)+\delta(u+cy)}$ una funzione qualunque di y, t, ed u, avremo nella medesima ipotesi $z_x = \int^x dy^x f.(y, t, u)$. Posta $x=0$ si trova $z_0 = f.(y, t, u) = F.(y, t, u)$, e perciò la serie data è eguale al suo primo termine, purchè in questo si facciano le integrazioni nella ipotesi di $t+by$, ed $u+cy$ costanti. Questo teorema è quel medesimo del num.° antecedente generalizzato, e facilmente si vede che può estendersi ad un numero qualunque di variabili.

43.

L'uso principale della teoria esposta consiste nella evoluzione delle funzioni in serie. Abbiamo veduto nel Tomo II. num.° 117., che data l'equazione $z=0$ tra le variabili x, y, t, u, ec. una funzione F delle medesime variabili si esprime per y, t, u, ec. senza x per mezzo della serie seguente

$$F = F + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \text{ec.}$$

ove $a_1 = A\frac{dF}{dx}$, $A = -\frac{1}{\frac{dz}{dx}}$, $a_r = A\frac{da_{r-1}}{rdx}$, purchè nel secondo

membro si ponga $x=f$, essendo f una funzione di y, t, u, ec. Quantunque nel luogo citato z ed F si supponessero funzioni solamente di x ed y, facilmente si comprende, che il medesimo teorema ha luogo per un numero qualunque di variabili x, y, t, u, ec.

Se mettiamo l'equazione $z=0$ sotto la forma $x-f-i\phi=0$, ove ϕ è funzione di x, y, t, u, ec., avremo

$$A=-\frac{1}{1-i\frac{d\phi}{dx}},\quad a_1=-\frac{1}{1-i\frac{d\phi}{dx}}\cdot\frac{dF}{dx},\quad a_r=-\frac{1}{1-i\frac{d\phi}{dx}}\cdot\frac{da_{r-1}}{rdx},\ \text{ed}$$

osservando, che z diventa $-i\phi$ quando vi si pone $x=f$, otterremo

$$F=F-ia_1\phi+i^2a_2\phi^2-i^3a_3\phi^3+i^4a_4\phi^4-\text{ec.}$$

Ora se si volesse ordinare questa serie per le potenze di i, è chiaro che il coefficiente di i^r sarebbe

$$(A)\quad \pm\left(\phi^r a_r-\phi^{r-1}\cdot\frac{da_{r-1}}{di}+\phi^{r-2}\cdot\frac{d^2a_{r-2}}{2di^2}\ldots\mp\phi\,\frac{d^{r-1}a_1}{2.3\ldots rdi^{r-1}}\right),$$

ove il segno superiore ha luogo quando r è pari, e l'inferiore quando r è dispari, purchè dopo le differenziazioni si faccia in questa formola $i=0$.

L'espressione trovata è molto complicata, e per poterne fare uso convien prima calcolare le quantità $a_1, a_2, a_3, \ldots a_r$. Ma anche senza cercare i valori di queste quantità, dalla sola cognizione delle relazioni, che hanno tra loro, si può ricavare una espressione assai più semplice del coefficiente di i^r. Si osservi primieramente che l'equazione $a_r=-\frac{1}{1-i\frac{d\phi}{dx}}\cdot\frac{da_{r-1}}{rdx}$ posta sotto la forma $\left(1-i\frac{d\phi}{dx}\right)a_r=-\frac{da_{r-1}}{rdx}$, e differenziata n volte per rapporto ad i ci dà $\left(1-i\frac{d\phi}{dx}\right)\frac{d^na_r}{di^n}-n\frac{d\phi}{dx}\cdot\frac{d^{n-1}a_r}{di^{n-1}}=-\frac{d^{n+1}a_{r-1}}{rdxdi^n}$

e quindi nel caso di $i=o$ abbiamo $a_r = -\frac{da_{r-1}}{rdx}$, e

$\frac{d^n a_r}{di^n} = n\frac{d\phi}{dx} \cdot \frac{d^{n-1}a_r}{di^{n-1}} - \frac{d^{n+1}a_{r-1}}{rdxdi^n}$. Ciò posto, invece della formola (A) consideriamo la formola più generale (B)

$$(B) \quad \pm\left(\phi^s a_r - \frac{s}{r}\phi^{s-1} \cdot \frac{da_{r-1}}{di} + \frac{s(s-1)}{r(r-1)} \cdot \frac{d^2 a_{r-2}}{2di^2} - \text{ec.}\right),$$

la quale si cangia nella espressione (A) se vi si pone $s=r$, e cerchiamone il valore nel caso di $i=o$.

Siccome riguardando non solo le variabili y, t, u ec. ma anche s come costanti la formola (B) è una funzione di x ed r, facciamola eguale ad $A_{r,x}$, e ponendovi $r+1$ in luogo di r avremo

$$A_{r+1,x} = \mp\left(\phi^s a_{r+1} - \frac{s}{r+1}\phi^{s-1} \cdot \frac{da_r}{di} + \frac{s(s-1)}{(r+1)r}\phi^{s-2} \cdot \frac{d^2 a_{r-1}}{2di^2} - \text{ec.}\right).$$

Ma se in luogo di a_{r+1}, $\frac{da_r}{di}$, $\frac{d^2 a_{r-1}}{2di^2}$, ec. ponghiamo i loro valori ricavati dall'equazioni $a_r = -\frac{da_{r-1}}{rdx}$, e

$\frac{d^n a_r}{di^n} = n\frac{d\phi}{dx} \cdot \frac{d^{n-1}a_r}{di^{n-1}} - \frac{d^{n+1}a_{r-1}}{rdxdi^n}$, troveremo

$$A_{r+1,x} = \pm\frac{1}{r+1}\left\{\begin{array}{l} s \cdot \frac{da_r}{dx} - \frac{s}{r}\phi^{s-1} \cdot \frac{d^2 a_{r-1}}{dxdi} + \frac{s(s-1)}{r(r-1)}\phi^{s-2} \cdot \frac{d^2 a_{r-2}}{2dxdi^2} - \text{ec.} \\ +s\phi^{s-1} \cdot \frac{d\phi}{dx}a_r - \frac{s(s-1)}{r}\phi^{s-2} \cdot \frac{d\phi}{dx} \cdot \frac{da_{r-1}}{di} + \text{ec.} \end{array}\right.$$

Ora questa quantità è visibilmente $= \frac{1}{r+1} \cdot \frac{dA_{r,x}}{dx}$; quindi avremo per determinare $A_{r,x}$ l'equazione

$$A_{r+1,x}=\frac{1}{r+1}\cdot\frac{dA_{r,x}}{dx},$$

l'integrale della quale è (16)

$$A_{r,x}=\frac{1}{2.3\ldots r}\cdot\frac{d^r\Psi.(x,s,y,t.\text{ec.})}{dx^r},$$

e per determinare la funzione arbitraria Ψ faremo $r=1$, e troveremo

$$A_{1,x}=\frac{d\Psi}{dx}=-\phi^s a_1, \text{ e quindi } A_{r,x}=-\frac{1}{2.3\ldots r}\cdot\frac{d^{r-1}.\phi^s a_1}{dx^{r-1}}.$$

Se adesso facciamo $s=r$, otterremo

$$(A)=-\frac{1}{2.3\ldots r}\cdot\frac{d^{r-1}.\phi^r a_1}{dx^{r-1}}=\frac{1}{2.3\ldots r}\cdot\frac{d^{r-1}.\phi^r\frac{dF}{dx}}{dx^{r-1}},$$

perchè nel caso di $i=0$ è $a_1=-\frac{dF}{dx}$; e questo è il coefficiente cercato di i^r. Sarà pertanto

$$F=F+i\phi\frac{dF}{dx}+i^2\frac{d.\phi^2\frac{dF}{dx}}{2dx}+i^3\frac{d^2.\phi^3\frac{dF}{dx}}{2.3dx^2}+\text{ec.}$$

purchè nel secondo membro si faccia $x=f$. E questa serie, posto $i=1$, è quella medesima, che avevamo per induzione ottenuta nel citato n.° del Tomo II. e di cui l'invenzione si deve al gran Geometra *Lagrange*.

44.

Quantunque la formola trovata ci somministri un mezzo facile per convertire in serie la funzione F, pure in questa serie le variabili y, t, u, ec. saranno tra loro inviluppate. Vediamo come trovar si possa una serie ordinata per le potenze ed i prodotti delle variabili y, t, u, ec. Sia data l'equazione $z=0$ tra le variabili x ed y, la quale suppongo libera dalle frazioni e dai radicali, e si debba trovare il valore di una funzione u delle medesime variabili x ed y in una serie ordinata per le potenze positive di y. L'equazione $z=0$, posta $y=0$, si ridurrà ad essere

una equazione tra x e costanti, la quale risoluta ci darà varj valori di x. Sia a uno di questi valori, cioè sia $x-a$ uno dei fattori della funzione z, allorchè vi si pone $y=0$, ed A sia il prodotto degli altri fattori, che suppongo tutti diversi da $x-a$; è chiaro che si può dare alla equazione $z=0$ la forma $(x-a)A+\phi=0$, essendo ϕ una funzione di x ed y, la quale svanisce quando $y=0$. La funzione ϕ non avrà il fattore $x-a$, perchè se lo avesse, l'equazione $z=0$ si risolverebbe nelle due $x-a=0$, $A+\frac{\phi}{x-a}=0$, le quali converrebbe considerare separatamente. Si può anche supporre, che la quantità a non entri in ϕ, perchè, se ciò fosse, vi si potrebbe mettere un'altra lettera b in luogo di a, e si risolverebbe un problema più generale, e dopo terminate le operazioni si farebbe $b=a$ per aver la soluzione nel caso dato. Ciò posto, se riguardando x come una funzione di y ed a data dalla equazione $(x-a)A+\phi=0$ differenziamo la medesima equazione prima per rapporto ad a e poi per rapporto ad y, avremo

$$A\frac{dx}{da}+(x-a)\frac{dA}{dx}\cdot\frac{dx}{da}-A+\frac{d\phi}{dx}\cdot\frac{dx}{da}=0$$
$$A\frac{dx}{dy}+(x-a)\frac{dA}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}+\frac{d\phi}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=0,$$

e di quì dedurremo

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{d\phi}{Ady}\cdot\frac{dx}{da}=-\frac{dz}{Ady}\cdot\frac{dx}{da},$$

perchè $\frac{d\phi}{dy}=\frac{dz}{dy}$.

Se la funzione data u contenesse a, si potrebbe da essa eliminare ponendovi in luogo di a il suo valore $x+\frac{\phi}{A}$ dedotto dalla equazione $z=0$; perciò si può supporre che a non sia contenuta in u. Per ridurre la funzione u in una serie ordinata per le potenze intere positive di y convien cercare i differenziali di u presi per rapporto ad y, e per trovar questi siccome avrò bisogno di differenziare u relativamente ad y in due diverse maniere, mi servirò di due segni differenti; cioè indicherò questo differenziale col segno $\frac{du}{dy}$, quando si considera x come funzione di y data dalla equazione $z=0$, e col segno $\left(\frac{du}{dy}\right)$, quando si riguar-

dano x ed y come tra loro indipendenti. Sarà dunque

$$\frac{du}{dy}=\left(\frac{du}{dy}\right)+\frac{du}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=\left(\frac{du}{dy}\right)-\frac{1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)\frac{du}{dx}\cdot\frac{dx}{da},$$

e siccome $P\frac{dx}{da}=\frac{d.\int Pdx}{da}$, allorchè nell'integrale $\int Pdx$ si suppone y costante, sarà in questa ipotesi

$$(1)\quad \frac{du}{dy}=\left(\frac{du}{dy}\right)-\frac{d.\int\frac{1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)\frac{du}{dx}dx}{da}$$

Questa equazione differenziata per rapporto ad y ci darà

$$\frac{d^2u}{dy^2}=\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)+\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)\frac{dx}{dy}-\frac{d^2.\int\frac{1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)\frac{du}{dx}dx}{dady}.$$

Ma $\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)\frac{du}{dx}=-\frac{d.\int\frac{1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)dx}{da}$, e ponendo nella equazione (1) $\int\frac{1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)\frac{du}{dx}dx$ in luogo di u abbiamo $\frac{d.\int\frac{1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)\frac{du}{dx}dx}{dy}$

$$=\int\left[\frac{1}{A}\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\frac{du}{dx}+\frac{1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)\right]dx-\frac{d.\int\frac{1}{A^2}\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\frac{du}{dx}dx}{da}.$$

Quindi sostituendo questi valori troveremo $\frac{d^2u}{dy^2}$ espresso nella forma seguente

$$(2)\quad \frac{d^2u}{dy^2}=\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)+\frac{d.\int adx}{da}+\frac{d^2.\int a_1dx}{da^2}.$$

Differenziamo di nuovo l'equazione (2), ed otterremo

$$\frac{d^3u}{dy^3}=\left(\frac{d^3u}{dy^3}\right)+\left(\frac{d^3u}{dxdy^2}\right)\frac{dx}{dy}+\frac{d^2.\int adx}{dady}+\frac{d^3.\int a_1dx}{da^2dy}.$$

Ma in vigore della equazione (1) si ritrova

$$\frac{d.\int adx}{dy}=\int\left(\frac{da}{dy}\right)dx-\frac{d.\int\frac{1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)adx}{da}$$

$$\frac{d.\int a_1dx}{dy}=\int\left(\frac{da_1}{dy}\right)dx-\frac{d.\int\frac{1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)a_1dx}{da},$$

$\left(\frac{d^2u}{dxdy^2}\right)\frac{dx}{dy}=-\frac{d.\int\frac{1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{d^2u}{dxdy^2}\right)dx}{da}$. Pertanto il valore di $\frac{d^2u}{dy^2}$ avrà la forma

$$\frac{d^2u}{dy^2}=\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)+\frac{d.\int\beta dx}{da}+\frac{d^2.\int\beta_1 dx}{da^2}+\frac{d^3.\int\beta_2 dx}{da^3}.$$

Continuando ad operare nella medesima maniera troveremo in generale, che il valore di $\frac{d^nu}{dy^n}$ sarà della forma seguente;

$$(a)\quad \frac{d^nu}{dy^n}=\left(\frac{d^nu}{dy^n}\right)+\frac{d.\int Bdx}{da}+\frac{d^2.\int B_1dx}{da^2}+\frac{d^3.\int B_2dx}{da^3}\ldots+\frac{d^n.\int B(n-1)dx}{da^n},$$

ove converrà trovare le quantità B, B_1, B_2, ec.

Se chiamiamo B', B_1', B_2', ec. i valori di B, B_1, B_2, ec., quando n diventa $n+1$, avremo

$$(b)\quad \frac{d^{n+1}u}{dy^{n+1}}=\left(\frac{d^{n+1}u}{dy^{n+1}}\right)+\frac{d.\int B'dx}{da}+\frac{d^2.\int B_1'dx}{da^2}+\frac{d^3.\int B_2'dx}{da^3}+\text{ec.}$$

Ma l'equazione (a) differenziata ci dà

$$\frac{d^{n+1}u}{dy^{n+1}}=\left(\frac{d^{n+1}u}{dy^{n+1}}\right)-\frac{d.\int\frac{1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{d^{n+1}u}{dxdy^n}\right)dx}{da}-\frac{d^2.\int\frac{B}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)dx}{da^2}-\text{ec.}$$

$$+\frac{d.\int\left(\frac{dB}{dy}\right)dx}{da}\qquad+\frac{d^2.\int\left(\frac{dB_1}{dy}\right)dx}{da^2}+\text{ec.}$$

Dunque paragonando questa con l'equazione (b) avremo la seguente serie di equazioni a differenze finite ed infinitesime

$$(A)\quad \begin{aligned} B'&=\left(\frac{dB}{dy}\right)-\frac{1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{d^{n+1}u}{dxdy^n}\right)\\ B_1'&=\left(\frac{dB_1}{dy}\right)-\frac{B}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)\\ B_2'&=\left(\frac{dB_2}{dy}\right)-\frac{B_1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)\\ &\text{ec.}\end{aligned}$$

Se adesso osserviamo, che $\frac{d\int B dx}{da} = B\frac{dx}{da}$, otterremo

$$(c)\quad \frac{d^n u}{dy^n} = \left(\frac{d^n u}{dy^n}\right) + B\frac{dx}{da} + \frac{d.B1\frac{dx}{da}}{da} + \frac{d^2.B2\frac{dx}{da}}{da^2} \ldots + \frac{d^{n-1}.B(n-1)\frac{dx}{da}}{da^{n-1}}.$$

Ma per svolgere la funzione u in una serie ordinata per le potenze di y, bisogna trovare il valore di $\frac{d^n u}{dy^n}$ quando $y=0$. Ora l'equazione $z=0$, allorchè $y=0$, ci dà $x=a$; dunque avremo il ricercato valore di $\frac{d^n u}{dy^n}$ nel caso di $y=0$, se nel secondo membro della equazione (c) porremo $y=0$ ed $x=a$. Per altra parte, siccome u, e $\frac{dz}{dy} = \frac{d\phi}{dy}$, ed in conseguenza le quantità $B, B1$, ec. non contengono a, facilmente si vede che $\frac{d^r.B(r)\frac{dx}{da}}{da^r}$, ponendovi $x=a$, è lo stesso che $\frac{d^r.B(r)}{dx^r}$, se vi si pone $x=a$ dopo le differenziazioni. Sarà pertanto con questa condizione

$$\frac{d^n u}{dy^n} = \left(\frac{d^n u}{dy^n}\right) + B + \frac{dB1}{dx} + \frac{d^2 B2}{dx^2} \ldots + \frac{d^{n-1} B(n-1)}{dx^{n-1}}.$$

Converrebbe adesso trovare i valori di B, $B1$, ec. mediante l'integrazione dell'equazioni (A): ma senza eseguire una tale integrazione, dalla quale difficilmente ottener si potrebbe il generale valore di $B(r)$, la sola coguizione delle relazioni, che regnano tra le quantità B, $B1$, ec., ci basterà per conseguire sotto una forma assai semplice il ricercato valore di $\frac{d^n u}{dy^n}$ nel caso di $y=0$. Prima però è necessario di mettere l'equazione precedente sotto un'altra forma. Si osservi che, quando si fà $x=a$ dopo le differenziazioni, è sempre

$\frac{d^{n-1}.(x-a)^r P}{dx^{n-1}} = (n-1)(n-2)\ldots(n-r)\frac{d^{n-r-1}P}{dx^{n-r-1}}$, dunque avremo

$$\frac{d^n u}{dy^n} = \left(\frac{d^n u}{dy^n}\right) + \frac{d^{n-1}[b(x-a)^{n-1} + b1(x-a)^{n-2} + b2(x-a)^{n-3} \ldots + b(n-1)]}{dx^{n-1}},$$

ove $b = \frac{B}{1.2\ldots(n-1)}$, $b1 = \frac{B1}{2.3\ldots(n-1)}$, $b2 = \frac{B2}{3.4\ldots(n-2)}$, ec., cioè avranno luogo tra b, $b1$, $b2$, ec. le seguenti equazioni

$$nb' = \left(\frac{db}{dy}\right) - \frac{1}{1.2\ldots(n-1)} \cdot \frac{1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{d^{n+1}u}{dxdy^n}\right)$$

$$nb1' = \left(\frac{db1}{dy}\right) - \frac{b}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)$$

$$nb2' = \left(\frac{db2}{dy}\right) - \frac{b1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)$$

ec.

Consideriamo adesso la quantità

$$\frac{Ab}{z} + \frac{A^2 b1}{z^2} + \frac{A^3 b2}{z^3} + \frac{A^4 b3}{z^4} \ldots + \frac{A^n b(n-1)}{z^n},$$

la quale, se riguardiamo x come costante, è una funzione di n ed y, che chiameremo $S_{n,y}$. Ponendovi $n+1$ in luogo di n avremo

$$S_{n+1,y} = \frac{Ab'}{z} + \frac{A^2 b1'}{z^2} + \frac{A^3 b2'}{z^3} + \frac{A^4 b3'}{z^4} + \text{ec.},$$

e sostituendovi i valori di b', $b1'$, $b2'$, ec. ricavati dall'equazioni precedenti sarà

$$S_{n+1,y} = -\frac{1}{1.2\ldots n}\left(\frac{dz}{zdy}\right)\left(\frac{d^{n+1}u}{dxdy^n}\right) + \frac{1}{n}\frac{A}{z}\left(\frac{db}{dy}\right)$$
$$-\frac{1}{n}\cdot\frac{Ab}{z^2}\left(\frac{dz}{dy}\right) + \frac{1}{n}\cdot\frac{A^2}{z^2}\left(\frac{db1}{dy}\right)$$
$$-\frac{2}{n}\cdot\frac{A^2 b1}{z^3}\left(\frac{dz}{dy}\right) + \frac{1}{n}\cdot\frac{A^3}{z^3}\left(\frac{db2}{dy}\right)$$
$$-\text{ec.}$$

Ma la quantità $S_{n,y}$ differenziata per rapporto ad y ci dà

$$\frac{dS_{n,y}}{dy}=\frac{A}{z}\left(\frac{db}{dy}\right)+\frac{A^2}{z^2}\left(\frac{db_1}{dy}\right)+\frac{A^3}{z^3}\left(\frac{db_2}{dy}\right)+\text{ec.}$$
$$-\frac{Ab}{z^2}\left(\frac{dz}{dy}\right)-\frac{2A^2b_1}{z^3}\left(\frac{dz}{dy}\right)-\frac{3A^3b_2}{z^4}\left(\frac{dz}{dy}\right)-\text{ec.}$$

Quindi avremo l'equazione

$$S_{n+1,y}=\frac{1}{n}\cdot\frac{dS_{n,y}}{dy}-\frac{1}{1.2...n}\left(\frac{dz}{zdy}\right)\left(\frac{d^{n+1}u}{dxdy^n}\right),$$

l'integrale della quale è (16)

$$S_{n,y}=\frac{1}{1.2...(n-1)}\cdot\frac{d^n\left[f.(x,y)-\Sigma\int^{n+1}dy^{n+1}\left(\frac{dz}{zdy}\right)\left(\frac{d^{n+1}u}{dxdy^n}\right)\right]}{dy^n}.$$

Per rendere questo valore più semplice liberandolo dal segno integrale Σ facciamo

$\Sigma\int^{n+1}dy^{n+1}\left(\frac{dz}{zdy}\right)\left(\frac{d^{n+1}u}{dxdy^n}\right)=\int^n dy^n.P_{n,y}.Q$, ove $P_{n,y}$ è funzione di n ed y, e Q funzione di y; e prendendo la differenza finita per rapporto ad n avremo

$$\int^{n+1}dy^{n+1}\left(\frac{dz}{zdy}\right)\left(\frac{d^{n+1}u}{dxdy^n}\right)=\int^{n+1}dy^{n+1}.P_{n+1,y}.Q$$
$$-\int^n dy^n.P_{n,y}.Q=\int^{n+1}dy^{n+1}\left(P_{n+1,y}.Q-P_{n,y}.\frac{dQ}{dy}-Q\frac{dP_{n,y}}{dy}\right).$$

Quindi sarà $\left(\frac{dz}{zdy}\right)\left(\frac{d^{n+1}u}{dxdy^n}\right)=Q\left(P_{n+1,y}-\frac{dP_{n,y}}{dy}\right)-P_{n,y}.\frac{dQ}{dy}$;

e se facciamo $P_{n+1,y}-\frac{dP_{n,y}}{dy}=0$, cioè $P_{n,y}=\frac{d^n\Psi.y}{dy^n}$, otterremo $\left(\frac{dz}{zdy}\right)\left(\frac{d^{n+1}u}{dxdy^n}\right)=-\frac{d^n\Psi.y}{dy^n}.\frac{dQ}{dy}$, alla qual'equazione si soddisfà prendendo $\Psi.y=\frac{du}{dx}$, e $-\frac{dQ}{dy}=\left(\frac{dz}{zdy}\right)$, cioè $Q=C-\log.z$. Sostituiti questi valori quello di $S_{n,y}$ diventerà

$$S_{n\,,\,y}=\frac{1}{1.2...(n-1)}\left[\frac{d^n f.(x,y)}{dy^n}-(C-\log.z)\left(\frac{d^{n+1}u}{dxdy^n}\right)\right].$$

A fine di determinare la funzione arbitraria $f.(x,y)$ facciamo $n=1$, ed avremo $S_{1\,,\,y}=\frac{df.(x,y)}{dy}-(C-\log.z)\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)=\frac{Ab}{z}$; ma quando $n=1$, è $b=-\frac{1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)\frac{du}{dx}$; dunque sarà

$\frac{df.(x,y)}{dy}=-\left(\frac{dz}{zdy}\right)\frac{du}{dx}+(C-\log.x)\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)$; e

$f.(x,y)=c+C\frac{du}{dx}-\frac{du}{dx}\log.z$, ove C e c sono funzioni di x.

Avremo pertanto

$$\frac{Ab}{z}+\frac{A^2b1}{z^2}+\frac{A^3b2}{z^3}\ldots+\frac{A^nb(n-1)}{z^n}$$

$$=-\frac{1}{1\,.\,2\,\ldots\,(n-1)}\left[\left(\frac{d^n\,.\,\frac{du}{dx}\log.z}{dy^n}\right)-\log.z\left(\frac{d^{n+1}u}{dxdy^n}\right)\right],$$

e siccome nel caso di $y=o$ è $z=(x-a)A$, sarà in questo caso

$$\frac{b}{x-a}+\frac{b1}{(x-a)^2}+\frac{b2}{(x-a)^3}\ldots+\frac{b(n-1)}{(x-a)^n}$$

$$=-\frac{1}{1\,.\,2\,\ldots\,(n-1)}\left[\left(\frac{d^n\,.\,\frac{du}{dx}\log.z}{dy^n}\right)-\log.z\left(\frac{d^{n+1}u}{dxdy^n}\right)\right].$$

Moltiplicando questa equazione per $(x-a)^n$, e differenziandola $n-1$ volte per rapporto ad x otterremo

$$\frac{d^{n-1}[b(x-a)^{n-1}+b2(x-a)^{n-2}+b3(x-a)^{n-3}\ldots+b(n-1)]}{dx^{n-1}}$$

$$=-\frac{d^{n-1}(x-a)^n\left(\frac{d^n\,.\,\frac{du}{dx}\log.z}{dy^n}\right)}{1\,.\,2\ldots(n-1)dx^{n-1}}+\frac{d^{n-1}(x-a)^n\left(\frac{d^{n+1}u}{dxdy^n}\right)\log.z}{1\,.\,2\ldots(n-1)dx^{n-1}}.$$

Ma siccome dopo le differenziazioni si deve fare $x=a$, si po-

trà omettere il termine $\frac{d^{n-1}(x-a)^n\left(\frac{d^{n+1}u}{dxdy^n}\right)\log.z}{1.2\ldots(n-1)dx^{n-1}}$, il quale è sempre $=0$. Infatti siccome $\left(\frac{d^{n+1}u}{dxdy^n}\right)$ non contiene a, il termine precedente sarà della forma

$$[Q(x-a)+Q_1(x-a)^2\ldots+Q_{n-1}(x-a)^n]\log.(x-a)$$
$$+R(x-a)+R_1(x-a)^2\ldots+R_{n-2}(x-a)^{n-1},$$

ove i coefficienti Q, Q_1, R, R_1, ec. non contenendo a non potranno divenire infiniti quando $x=a$. Ora questa quantità è $=0$ nel caso di $x=a$, perchè nel medesimo caso è $(x-a)^r\log.(x-a)=0$, quando r è un numero intero positivo; lo che facilmente apparisce se si pone $(x-a)^r\log.(x-a)=t$, cioè $\log.(x-a)=\frac{t}{(x-a)^r}$, la qual'equazione differenziata ci dà $(x-a)^r=(x-a)\frac{dt}{dx}-rt$, e questa ci avverte che $t=0$ quando $x=a$. Avremo adunque finalmente nel caso di $y=0$

$$\frac{d^nu}{dy^n}=\frac{d^nu}{dy^n}-\frac{d^{n-1}(x-a)^n\frac{d^n.\frac{du}{dx}}{dy^n}\log.z}{1.2....(n-1)dx^{n-1}},$$

e siccome abbiamo dal secondo membro tolte tutte le parentesi, si comprende che in esso devono riguardarsi le quantità x ed y come tra loro indipendenti, e fare $y=0$ dopo le differenziazioni relative ad y, ed $x=a$ dopo tutte le differenziazioni. E se chiamiamo q_n il coefficiente di y^n nella serie, che nasce dallo sviluppo di u, sarà con queste condizioni

$$q^n = \frac{d^n u}{1.2\ldots n dy^n} - \frac{d^{n-1}(x-a)^n \dfrac{d^n \cdot \dfrac{du}{dx}\log.z}{1.2\ldots n dy^n}}{1.2\ldots(n-1)dx^{n-1}}.$$

Se per esempio z è della forma $x-a-yF$, ed F ed u non contengono y, ma sono ambedue funzioni della sola x, facilmente apparisce che

$$\frac{d^n \cdot \frac{du}{dx}\log.z}{1.2\ldots n dy^n} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{d^n.\log.(x-a-yF)}{1.2\ldots n dy^n} = -\frac{du}{dx} \cdot \frac{F^n}{n(x-a)^n},$$ allorchè

si pone $y=0$. E siccome anche $\frac{du}{dy}=0$, avremo in questo caso

$$q^n = \frac{d^{n-1}.F^n \frac{du}{dx}}{1.2\ldots n dx^{n-1}},$$

lo che combina con ciò che abbiamo ottenuto nel num.° antecedente.

45.

Abbiamo trovata la serie, che rappresenta u dipendentemente dal fattore $x-a$, ed una simile serie si troverà per esprimere u, qualunque altro fattore si assuma di ciò che diventa la quantità z, allorchè $y=0$; ma perchè la cosa riesca, conviene che tutti questi fattori siano disuguali: infatti abbiamo supposto nei calcoli precedenti, che A non contenga altri fattori eguali ad $x-a$. Nel caso che vi siano più fattori eguali espressi da $(x-a)^i$, la quantità z si può considerare risoluta in i fattori z', z'', z''', ec., ciascuno dei quali abbia la forma $(x-a).A'+\phi'$, ove A' non contenga più il fattore $x-a$, e ϕ' sia una funzione di x ed y, che svanisca quando $y=0$. Ciascuno dei fattori z', z'', ec. ci darà per coefficiente di y^n nella serie di u la quantità

$$\frac{d^n u}{1.2...ndy^n} - \frac{d^{n-1}(x-a)^n \dfrac{d^n . \frac{du}{dx} \log.z'}{1.2...ndy^n}}{1.2,..(n-1)dx^{n-1}}.$$

Se adesso prendiamo il medio aritmetico tra tutte le i serie, che nascono dai fattori z', z'', ec., e chiamiamo q_n il coefficiente di y^n in questa serie media, avremo

$$q^n = \frac{d^n u}{1.2...ndy^n} - \frac{d^{n-1}(x-a)^n \dfrac{d^n . \frac{du}{dx}(\log.z' + \log.z'' + \log.z''' + \text{ec.})}{1.2...ndy^n}}{1.2.....(n-1)idx^{n-1}},$$

cioè, a motivo di $\log. z' + \log. z'' + \log. z''' + \text{ec.} = \log. z$,

$$q^n = \frac{d^n u}{1.2...ndy^n} - \frac{d^{n-1}(x-a)^n \dfrac{d^n . \frac{du}{dx} \log.z}{1.2...ndy^n}}{1.2....(n-1)idx^{n-1}},$$

posto, come sopra, $y=0$ dopo le differenziazioni relative ad y, ed $x=a$ dopo tutte le differenziazioni.

Questo elegantissimo teorema è stato dato senza dimostrazione dal sommo Geometra *Laplace* nelle Memorie dell'Accademia delle Scienze di Parigi dell'anno 1777. per trovare il coefficiente di y^n nella serie, che nasce dal fattore $(x-a)^i$. Dall'analisi precedente apparisce, che il teorema è, qual vien descritto, quando $i=1$; ma quando $i>1$ si deve in modo interpretare, che q_n esprima il coefficiente di y^n nella serie, che è il medio aritmetico tra tutte quelle, le quali rappresentano il valore di u dipendentemente dal fattore $(x-a)^i$. Ma questa serie media non ci dà il valore esatto di u, poichè con essa non si soddisfà alla equazione $x=0$, cioè non si assume tra x ed y quel rapporto, che è dato da questa equazione.

Per mostrar ciò con un esempio semplicissimo, sia data l'equazione $(x-a)^2 - y^2(b+cx)^2 = 0$, e si voglia svolgere il valore

di x in una serie ordinata per le potenze di y. Saranno $x-a-y(b+cx)$, $x-a+y(b+cx)$ i due fattori della quantità z, e questi fattori ci daranno le due serie

$$x=a+(ac+b)y+c(ac+b)y^2+c^2(ac+b)y^3+\text{ec.}$$
$$x=a-(ac+b)y+c(ac+b)y^2-c^2(ac+b)y^3+\text{ec.}$$

ciascuna delle quali soddisfà all'equazione $z=0$. Se prendiamo di queste due serie il medio aritmetico, avremo quella serie, che ci dà il teorema di *Laplace*, cioè

$$x=a+c(ac+b)y^2+c^3(ac+b)y^4+\text{ec.},$$

ma questa non soddisfà all'equazione $z=0$.

46.

Un'altra dimostrazione del teorema di *Laplace* si può ricavare dal n.° 43., la quale noi esporremo e per l'importanza del teorema medesimo, e perchè ne trarremo facilmente il modo di generalizzarlo e di estenderlo a più variabili e più equazioni. Sia data tra le variabili x, y, t, r, ec. l'equazione $z=0$, la quale supponghiamo esser libera dalle frazioni e dai radicali. Poste $y=0$, $t=0$, ec. la quantità z diventerà una funzione di x e costanti, che risoluta ne' suoi fattori sarà $=(x-a)(x-b)(x-c)$ec.; e ciascuno di questi fattori ci darà una serie per esprimere il valore di una funzione qualunque u delle medesime variabili x, y, t, ec. Prendiamo il fattore $x-a$, e la funzione z sarà della forma $(x-a)A-yF-tF'-$ec., ove A è il prodotto degli altri fattori $x-b$, $x-c$, ec., ed F, F', ec. sono funzioni tali di x, y, t, r, ec., che non diventino infinite, quando si fà $y=0$, $t=0$, ec. Nelle medesime circostanze supporremo che non diventi infinita la funzione u, nè i di lei differenziali, perchè se mai non fosse tale, si potrà sempre combinandola con l'equazione $z=0$ ridurre ad una forma, che non diventi infinita quando $y=0$, $t=0$, ec., almeno nel caso che essa possa esprimersi per le potenze ed i prodotti interi e positivi di y, t, ec., che è il solo caso, il quale per ora c'interessi. Paragonando l'equazione $(x-a)A-yF-tF'-$ec.$=0$ coll'altra $x-f-\phi=0$ contemplata nel n.° 43. avremo $f=a$, $\phi=\frac{yF+tF'+\text{ec.}}{A}$, e quindi

$$u=u+\phi\frac{du}{dx}+\frac{d.\phi^2\frac{du}{dx}}{2dx}+\frac{d^2.\phi^3\frac{du}{dx}}{2\,.\,3dx^2}+\text{ec.}$$

facendo nel secondo membro $x=a$ dopo le differenziazioni.

Se chiamiamo $q_{n,n',\text{ec.}}$ il coefficiente di $y^n t^{n'}$ ec. nella evoluzione di u, e per più semplicità ponghiamo $n+n'+\text{ec.}=m$, avremo

$$q_{n,n',\text{ec.}}=\frac{d^m u}{1.2\ldots n dy^n . 1.2\ldots n' dt^{n'}\ldots}$$

$$+\frac{d^m}{1.2\ldots n dy^n . 1.2\ldots n' dt^{n'}\ldots}\left(\phi\frac{du}{dx}+\frac{d.\phi^2\frac{du}{dx}}{2dx}+\text{ec.}\right)$$

facendo dopo le differenziazioni $y=0$, $t=0$, ec., ed $x=a$.

Quantunque la serie

$$\phi\frac{du}{dx}+\frac{d.\phi^2\frac{du}{dx}}{2dx}+\frac{d^2.\phi^3\frac{du}{dx}}{2.3dx^2}+\text{ec.}$$

vada all'infinito, non occorre al nostr'oggetto prenderne al di là del termine $\frac{d^{m-1}.\phi^m\frac{du}{dx}}{1.2\ldots m dx^{m-1}}$, perchè i termini seguenti svaniscono, quando vi si pone $y=0$, $t=0$, ec. . Infatti la quantità $\frac{d^m.\phi^{m+1}\frac{du}{dx}}{1.2\ldots(m+1)dx^m}$ sarà composta di termini della forma $My^a t^{a'} r^{a''}\ldots$, essendo $a+a'+a''+\text{ec.}=m+1$, ed M una funzione che non diventa infinita nel caso di $y=t=\text{ec.}=0$; quindi sarà nel medesimo caso $\frac{d^m.My^a t^{a'} r^{a''}\ldots}{1.2\ldots n dy^n . 1.2\ldots n' dt^{n'}\ldots}=0$. Con più forte ragione si potranno omettere gli altri termini susseguenti: onde chiamando p la seconda parte del valore di $q_{n,n',\text{ec.}}$ avremo

$$p=\frac{d^m}{1.2\ldots n dy^n . 1.2\ldots n' dt^{n'}\ldots}\left(\phi\frac{du}{dx}+\frac{d.\phi^2\frac{du}{dx}}{2dx}\ldots+\frac{d^{m-1}.\phi^m\frac{du}{dx}}{2.3\ldots m dx^{m-1}}\right).$$

Si osservi adesso che, dovendosi fare $x=a$ dopo le differenziazioni relative ad x, potremo porre la quantità

$$\phi.\frac{du}{dx}+\frac{d.\phi^2\frac{du}{dx}}{2dx}+\frac{d^2.\phi^3\frac{du}{dx}}{2.3dx^2}\ldots+\frac{d^{m-1}.\phi^m\frac{du}{dx}}{2.3\ldots mdx^{m-1}}$$

sotto la forma

$$\frac{d^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)dx^{m-1}}(x-a)^m\left\{\frac{\phi\frac{du}{dx}}{x-a}+\frac{\phi^2\frac{du}{dx}}{2(x-a)}\ldots+\frac{\phi^m\frac{du}{dx}}{m(x-a)^m}\right\},$$

la quale ha nel caso di $x=a$ il medesimo valore, che la precedente. Facendone la sostituzione nel valore di p, e permutando le differenziali, lo che è permesso perchè nel prendere queste differenziali si riguardano le variabili x, y, t, ec. come tra loro indipendenti, otterremo

$$p=\frac{d^{m-1}.(x-a)^m.\frac{d^m}{1.2\ldots ndy^n.1.2\ldots n'dt^{n'}\ldots}\left\{\frac{\phi\frac{du}{dx}}{x-a}+\frac{\phi^2\frac{du}{dx}}{(x-a)^2}\ldots+\frac{\phi^m\frac{du}{dx}}{m(x-a)^m}\right\}}{1.2\ldots\ldots(m-1)dx^{m-1}}$$

Questo valore di p si può ridurre ad una forma più semplice, se si riflette, che esso si mantiene lo stesso, quando invece di prendere la serie

$$\frac{\phi\frac{du}{dx}}{x-a}+\frac{\phi^2\frac{du}{dx}}{2(x-a)^2}+\frac{\phi^3\frac{du}{dx}}{3(x-a)^3}+\text{ec.}$$

composta di m termini si suppone che essa sia continuata all'infinito; perchè per le ragioni addotte di sopra i termini in questa supposizione aggiunti a p riescono tutti zero nel caso di $y=t=$ec.$=0$. Ma quando la serie precedente è prolungata all'infinito, diventa $=-\frac{du}{dx}\log.\left(1-\frac{\phi}{x-a}\right)$; dunque sarà

$$p=-\frac{d^{m-1}(x-a)^m.\frac{d^m}{1.2\ldots ndy^n.1.2\ldots n'dt^{n'}\ldots}\left[\frac{du}{dx}\log.\left(1-\frac{\phi}{x-a}\right)\right]}{1.2\ldots\ldots(m-1)dx^{m-1}}.$$

A questo valore si può aggiungere il termine

$$-\frac{d^{m-1}(x-a)^m.\dfrac{d^m}{1\,2\ldots n dy^n.1.2\ldots n' dt^{n'}\ldots}\left(\dfrac{du}{dx}\log.\overline{A(x-a)}\right)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,(m-1)\,dx^{m-1}},$$

il quale (44) è $=o$ nel caso di $x=a$. Ma $\log.\overline{A(x-a)}+\log.\left(1-\dfrac{\phi}{x-a}\right)$ $=\log.[A(x-a)-A\phi]=\log.z$: quindi avremo finalmente

$$p=-\frac{d^{m-1}(x-a)^m.\dfrac{d^m}{dy^n.dt^{n'}\ldots}\left(\dfrac{du}{dx}\log.z\right)}{1.2\ldots n.1\,2\ldots n'\ldots.1.2\ldots(m-1)dx^{m-1}},$$

e perciò

$$q_{n\,,\,n',\,\text{ec.}}=\frac{d^m u}{1.2..\,n dy^n.1.2\ldots n' dt^{n'}\ldots}$$

$$-\frac{d^{m-1}(x-a)^m.\dfrac{d^m}{dy^n.dt^{n'}\ldots}\left(\dfrac{du}{dx}\log.z\right)}{1.2..\,n.1.2\ldots n'\ldots 1.2\ldots(m-1)dx^{m-1}},$$

facendo $y=o$ dopo le differenziazioni relative ad y, $t=o$ dopo le differenziazioni relative a t, ec., ed $x=a$ dopo tutte le differenziazioni.

Ho supposto che il fattore $x-a$ non ne abbia altri eguali; se A conterrà il medesimo fattore $x-a$, le formole precedenti non ci daranno la serie, che esprime il valore di u. Infatti la formola

$$u+\phi\frac{du}{dx}+\frac{d.\phi^2\dfrac{du}{dx}}{2dx}+\frac{d^2.\phi^3\dfrac{du}{dx}}{2.3dx^2}+\text{ec.},$$

dalla quale siamo partiti, richiede che la funzione ϕ non contenga $x-a$ nel denominatore; altrimenti i suoi termini diventerebbero infiniti nel caso di $x=a$. Quando adunque vi saranno più fattori eguali rappresentati da $(x-a)^i$, converrà seguire un metodo analogo a quello praticato nel n.° 45. Si potrà ancora ottenere la serie, che è il medio aritmetico tra tutte quelle, le

quali nascono dal fattore $(x-a)^i$, e si troverà che relativamente a questa serie media il valore di $q_{n,n',\text{ec.}}$ sarà quello trovato precedentemente, purchè se ne divida la seconda parte per i.

47.

Siano date adesso due equazioni $z=0, z'=0$ tra le variabili x, y, t, r, ec., le quali siano rese libere dai radicali e dalle frazioni, e si proponga di svolgere una funzione u delle medesime variabili in una serie ordinata per le potenze ed i prodotti di t, r, ec. Siccome mediante le due equazioni $z=0$ e $z'=0$ si può eliminare x, ed ottenere un'altra equazione in y, t, r, ec. senza x, così supporremo che la quantità z' non contenga x. Ciò posto facciamo $t=0$, $r=0$, ec. nella equazione $z'=0$, e sia $y=b$ uno dei valori di y, che ne risultano, il quale supporrò che non ne abbia altri eguali. Ponendo adesso $t=0, r=0$, ec. ed $y=b$ nella equazione $z=0$ sia $x=a$ uno dei valori di x, che se ne ricavano, e questo ancora suppongo che non ne abbia altri eguali. Sarà z della forma $(x-a)A-(y-b)F-tF'-rF''-$ec., e z' della forma $(y-b)B-tf-rf'-$ec., ove A è funzione di x, F, F', F'', ec. funzioni di x, y, t, r, ec., B funzione di y, ed f, f', ec. funzioni di y, t, r, ec. Ora facendo uso della prima equazione $z=0$, e ponendo $\phi=\frac{(y-b)F+tF'+rF''+\text{ec.}}{A}$ avremo (43)

$$u=u+\phi\frac{du}{dx}+\frac{d.\phi^2\frac{du}{dx}}{2dx}+\frac{d^2.\phi^3\frac{du}{dx}}{2.3dx^2}+\text{ec.},$$

ove nel secondo membro si deve fare $x=a$ dopo le differenziazioni. Chiamiamo V questo secondo membro, e sarà V una funzione di y, t, r, ec., la quale se mediante l'equazione $z'=0$ vorremo svolgere per le potenze ed i prodotti di t, r, ec., avremo, denotando per $q_{n,n'}$, ec. il coefficiente di $t^n r^{n'}\ldots$,

$$q_{n\,,\,n'\,,\,\text{ec.}} = \frac{d^m V}{1.2\ldots n dt^n . 1.2\ldots n' dr^{n'} \ldots}$$

$$- \frac{d^{m-1}(y-b)^m . \dfrac{d^m}{dt^n . dr^{n'} \ldots}\left(\dfrac{dV}{dy}\log.z'\right)}{1.2\ldots n . 1.2\ldots n' \ldots 1.2\ldots(m-1)dy^{m-1}}$$

ove $m = n + n' + \text{ec.}$, purchè si faccia $t = 0$, $r = 0$, ec. ed $y = b$ dopo le differenziazioni.

Sostituiamo il valore di V, ed otterremo

$$q_{n\,,\,n'\,,\,\text{ec.}} = \frac{d^m u}{1.2\ldots n dt^n . 1.2\ldots n' dr^{n'} \ldots}$$

$$+ \frac{d^m . \left(\phi\dfrac{du}{dx} + \dfrac{d.\phi^2\dfrac{du}{dx}}{2dx} + \dfrac{d^2.\phi^3\dfrac{du}{dx}}{2.3dx^2} + \text{ec.}\right)}{1.2\ldots n dt^n . 1.2\ldots n' dr^{n'} \ldots}$$

$$- \frac{d^{m-1}(y-b)^m . \dfrac{d^m}{dt^n . dr^{n'} \ldots}\left(\dfrac{du}{dy}\log.z'\right)}{1.2\ldots n . 1.2\ldots n' \ldots 1.2\ldots(m-1)dy^{m-1}},$$

$$- \frac{d^{m-1}(y-b)^m . \dfrac{d^m}{dt^n . dr^{n'} \ldots} . \dfrac{d.\left(\phi\dfrac{du}{dx} + \dfrac{d.\phi^2\dfrac{du}{dx}}{2dx} + \text{ec.}\right)}{dy}\log.z'}{1.2\ldots n . 1.2\ldots n' \ldots 1.2\ldots(m-1)dy^{m-1}}.$$

La seconda parte di questo valore è per le cose precedenti

$$- \frac{d^{m-1}(x-a)^m . \dfrac{d^m}{dt^n . dr^{n'} \ldots}\left(\dfrac{du}{dx}\log.z\right)}{1.2\ldots n . 1.2\ldots n' \ldots 1.2\ldots(m-1)dx^{m-1}},$$

Nella quarta parte si potrà omettere il termine $\frac{d^{m+1}.\varphi^{m+1}\frac{du}{dx}}{1.2...(m+1)dx^m dy}$, che chiameremo P, e tutti i seguenti. Poichè differenziando P log.x' n volte per rapporto a t, n' volte per rapporto ad r, ec., e facendo poi $t=r=$ec.$=0$, questo termine ci porterebbe nella quarta parte una quantità Q della forma

$$Q=-\frac{d^{m-1}(y-b)^m.\left(\frac{p}{(y-b)^m B^m}+\frac{p'}{(y-b)^{m-1}B^{m-1}}\ldots+p^{(m)}\log(B.\overline{y-b})\right)}{1.2...n.1.2...n'...1.2...(m-1)dy^{m-1}}.$$

ove p sarà divisibile per $(y-b)^m$, p' divisibile per $(y-b)^{m-1}$, e generalmente $p^{(s)}$ divisibile per $(y-b)^{m-s}$. Infatti

$$p=P$$
$$p'=n\frac{dP}{dt}+n'\frac{dP}{dr}+\text{ec.}$$
$$p''=\frac{n(n-1)}{2}\frac{d^2P}{dt^2}+nn'\frac{d^2P}{dtdr}+\frac{n'(n'-1)}{2}\frac{d^2P}{dr^2}+\text{ec.}$$
$$\text{ec.}$$

purchè nei secondi membri di quest'equazioni si faccia $t=r=$ec.$=0$. Ora se riflettiamo che $\phi=\frac{(y-b)F+tF'+rF''+\text{ec.}}{A}$, facilmente vedremo che la quantità P è composta di termini della forma $M(y-b)^a t^{a'} r^{a''}\ldots$, ove M è una funzione che non diventa infinita quando $y=b$, ed a, a', a'', ec. sono numeri interi e tali che la loro somma $a+a'+a''+$ec. è $=m$, o $=m+1$. Facendo $t=r=$ec.$=0$ in P per ottenere il valore di p, tutti questi termini si annulleranno eccettuato quello, nel quale tutti gli esponenti a', a'', ec. sono zero, ed in conseguenza $a=m$, o $a=m+1$; onde sarà p divisibile per $(y-b)^m$. La quantità $n\frac{dP}{dt}+n'\frac{dP}{dr}+$ ec. sarà composta di termini della forma

$$n\frac{dM}{dt}(y-b)^a t^{a'} r^{a''}\ldots+nMa'(y-b)^a t^{a'-1} r^{a''}\ldots+n'\frac{dM}{dr}(y-b)^a t^{a'} r^{a''}\ldots$$
$$+n'Ma''(y-b)^a t^{a'} r^{a''-1}\ldots+\text{ec.};$$

e posto $t=r=$ec.$=0$ spariranno

dal valore di p' tutti i termini della forma $\left(n\frac{dM}{dt}+n'\frac{dM}{dr}+\text{ec.}\right)(y-b)^a t^{a'} r^{a''}\ldots$ eccettuati quelli, nei quali gli esponenti a', a'', ec. sono tutti zero, ed $a=m$, o $=m+1$. Così pure si annulleranno tutti i termini della forma $nMa'(y-b)^a t^{a'-1} r^{a''}\ldots+n'Ma''(y-b)^a t^{a'} r^{a''-1}\ldots+\text{ec.}$ ad eccezione di quelli, nei quali uno degli esponenti a', a'', ec. sarà $=1$ e tutti gli altri zero, e quindi $a=m-1$, o $a=m$. Sarà pertanto p' divisibile per $(y-b)^{m-1}$, e nella stessa guisa si dimostrerà che p'' è divisibile per $(y-b)^{m-2}$, e così delle altre quantità. Siccome adunque in Q si deve porre $y=b$ dopo le differenziazioni relative ad y, è chiaro che sarà $Q=0$, e si potrà tralasciare il termine P. E con più forte ragione potranno omettersi i termini più remoti dal principio della serie di quello, che abbiamo considerato.

Se adesso ripetiamo i ragionamenti usati nel num.° antecedente vedremo, che in luogo della serie

$$\phi\frac{du}{dx}+\frac{d.\phi^2\frac{du}{dx}}{2dx}+\frac{d^2.\phi^3\frac{du}{dx}}{2.3dx^2}+\text{ec.}$$

possiamo porre la quantità $-\frac{du}{dx}\log.z$. E fatta la sostituzione nella quarta parte del valore di $q_{n,n',\text{ec.}}$, e permutate le differenziali otterremo questa quarta parte così espressa

$$\frac{d^{2m-2}(x-a)^m(y-b)^m.\frac{d^m}{dt^n.dr^{n'}\ldots}\left\{\frac{d.\frac{du}{dx}\log.z}{dy}-\log.z'\right\}}{1.2\ldots n.1.2\ldots n'\ldots 1^2.2^2.3^2\ldots(m-1)^2 dx^{m-1}dy^{m-1}}$$

ove convien fare $t=r=\text{ec.}=0$ dopo le differenziazioni relative a t, r, ec., $y=b$ dopo le differenziazioni relative ad y, ed $x=a$ dopo tutte le differenziazioni. Sarà dunque con queste condizioni

$$q_{n,\,n',\,\text{ec.}} = \frac{d^m u}{1.2\ldots n\,dt^n . 1.2\ldots n'\,dr^{n'}\ldots}$$

$$- \frac{d^{m-1}(x-a)^m . \dfrac{d^m}{dt^n dr^{n'}\ldots}\left(\dfrac{du}{dx}\log.z\right)}{1.2\ldots n.1.2\ldots n'\ldots 1.2\ldots(m-1)dx^{m-1}}$$

$$- \frac{d^{m-1}(y-b)^m . \dfrac{d^m}{dt^n dr^{n'}\ldots}\left(\dfrac{du}{dy}\log.z'\right)}{1.2\ldots n.1.2\ldots n'\ldots 1.2\ldots(m-1)dy^{m-1}},$$

$$+ \frac{d^{2m-2}(x-a)^m(y-b)^m . \dfrac{d^m}{dt^n . dr^{n'}\ldots}\left\{\dfrac{d.\left(\dfrac{du}{dx}\log.z\right)}{dy} - \log.z'\right\}}{1.2\ldots n.1.2\ldots n'\ldots 1^2 . 2^2\ldots(m-1)^2 dx^{m-1} dy^{m-1}}.$$

Col medesimo metodo potrebbe risolversi il problema, quando sono date tre o più equazioni. Noi ci astenghiamo dal più lungamente parlarne, perchè và sempre crescendo la complicazione delle formole, e a proporzione diminuisce l'utilità che se ne ritrae.

48.

La teoria esposta in quest'Opuscolo serve ancora alla ricerca dell'integrale per serie dell'equazioni a differenze parziali infinitesime. Sia proposta l'equazione

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \gamma\frac{dz}{dx} - \delta\frac{dz}{dy} + \beta z = 0,$$

ove γ, δ, e β sono quantità costanti, e si domandi di esprimere per serie l'integrale completo di essa. Contentandoci in primo luogo di un integrale particolare ponghiamo

$$z = A_0 F.y + A_1\frac{dF}{dy} + A_2\frac{d^2F}{dy^2} + A_3\frac{d^3F}{dy^3} + \text{ec.}$$

ove A_0, A_1, A_2, ec. sono funzioni di x da determinarsi, e $F.y$ una funzione arbitraria di y; e sostituendo questo valore di z nella proposta avremo

$$0=\left(\frac{d^2A_0}{dx^2}+\gamma\frac{dA_0}{dx}+\beta A_0\right)F.y$$
$$+\left(\frac{d^2A_1}{dx^2}+\gamma\frac{dA_1}{dx}+\beta A_1-\delta A_0\right)\frac{dF}{dy}$$
$$+\left(\frac{d^2A_2}{dx^2}+\gamma\frac{dA_2}{dx}+\beta A_2-\delta A_1\right)\frac{d^2F}{dy^2}$$
$$+\text{ec.}$$

E siccome $F.y$ è una funzione arbitraria, dovranno svanire separatamente i coefficienti di $F.y$, $\frac{dF}{dy}$, $\frac{d^2F}{dy^2}$, ec., onde avremo per determinare A_0, A_1, A_2, ec. l'equazioni

$$(1)\quad \frac{d^2A_0}{dx^2}+\gamma\frac{dA_0}{dx}+\beta A_0=0$$
$$\frac{d^2A_1}{dx^2}+\gamma\frac{dA_1}{dx}+\beta A_1-\delta A_0=0$$
$$\frac{d^2A_2}{dx^2}+\gamma\frac{dA_2}{dx}+\beta A_2-\delta A_1=0$$

e generalmente

$$(a)\quad \frac{d^2A_{p+1}}{dx^2}+\gamma\frac{dA_{p+1}}{dx}+\beta A_{p+1}-\delta A_p=0$$

Tutto adunque dipende dalla integrazione di questa equazione, che è a differenze parziali finite ed infinitesime. L'integrale di essa (11) è il seguente

$$A_p=\delta^p e^{ax}\int^p dx^p e^{(b-a)x}\int^p dx^p \phi.x\,,$$

ove a e b sono le radici della equazione $t^2+\gamma t+\beta=0$. Per determinare la funzione arbitraria $\phi.x$ si osservi, che si può soddisfare alla equazione (1) con prendere $A_0=e^{ax}$. Pertanto, posta $p=0$, sarà $A_0=e^{ax}=e^{ax}e^{(b-a)x}\phi.x$, e quindi avremo $\phi.x=e^{(a-b)x}$. Ora $\int^p dx^p e^{(a-b)x}$ è $=\frac{e^{(a-b)x}}{(a-b)^p}$, ove trascuro

le funzioni arbitrarie di p, perchè non ho bisogno che di un valore particolare di A_p. Sarà dunque $A_p = \frac{\delta^p e^{ax} \int^p dx^p}{(a-b)^p}$, cioè

$$A_p = \frac{\delta^p e^{ax}}{(a-b)^p}\left(\frac{x^p}{1.2..p} + C_{1,p}\frac{x^{p-1}}{1...(p-1)} + C_{2,p}\frac{x^{p-2}}{1...(p-2)} ... + C_{p,p}\right).$$

Per determinare le funzioni $C_{1,p}$, $C_{2,p}$, ec. sostituiamo il valore di A_p nella equazione (a), e riflettendo che $\alpha^2+\gamma\alpha+\beta=0$, e $\gamma=-a-b$, posto $a-b=c$ troveremo

$$cC_{1,p+1} + cC_{1,p} = 0$$
$$cC_{2,p+1} + cC_{2,p} + C_{1,p+1} = 0$$

e generalmente

$$(a') \qquad cC_{r+1,p+1} + cC_{r+1,p} + C_{r,p+1} = 0.$$

Facciamo $C_{r,p} = \frac{1}{(-c)^r} B_{r,p}$, ed avremo

$$B_{1,p+1} - B_{1,p} = 0$$
$$(a'') \qquad B_{r+1,p+1} - B_{r+1,p} = B_{r,p+1}.$$

L'integrale di questa equazione è $B_{r,p} = \Sigma^r \Psi.(p+r)$, ove la caratteristica Σ denota la somma presa per rapporto a p; e per determinare la funzione Ψ ponendo $r=1$ troveremo $B_{1,p+1} - B_{1,p} = 1 = \Sigma\Psi.(p+2) - \Sigma\Psi.(p+1) = \Psi.(p+1)$. Sarà pertanto $B_{r,p-r+1} = \Sigma^r \Psi.(p+1) = \Sigma^r.1$, cioè

$$B_{r,p-r+1} = \frac{p(p-1)..(p-r+1)}{1.2....r} + D_{1,r}\frac{p(p-1)...(p-r+2)}{1.2....(r-1)} + D_{2,r}\frac{p(p-1)...(p-r+3)}{1.2...(r-2)} .... + D_{r,r}$$

e postovi $p+r-1$ in luogo di p

$$B_{r,p} = \frac{(p+r-1)(p+r-2)...p}{1.2.....r} + D_{1,r}\frac{(p+r-1)...(p+1)}{1.2...(p-1)} + D_{2,r}\frac{(p+r-1)...(p+2)}{1.2...(r-2)} ..... + D_{r,r}.$$

Se sostituiamo questo valore nella equazione (a''), vedremo che tutte le funzioni $D_{1,r}$, $D_{2,r}$, ec. sono costanti: sarà dunque

$$C_{r,p}=\frac{1}{(-c)^r}\left(\frac{(p+r-1)(p+r-2)\ldots p}{1\cdot 2\ldots r}+D'\frac{(p+r-1)\ldots(p+1)}{1\cdot 2\ldots(r-1)}\ldots+D^{(r)}\right).$$

Ora io osservo, che senza nulla togliere alla generalità si può dare qualunque valore determinato alle costanti D', D'', ec. Infatti sostituendo in A_p il valore di $C_{r,p}$, e lasciando queste costanti sotto una forma indeterminata avremo

$$z=e^{ax}\left\{\begin{array}{l}F.y+\frac{\delta}{c}\left(x-\frac{1+D'}{c}\right)\frac{dF}{dy}\\ +\frac{\delta^2}{c^2}\left(\frac{x^2}{1\cdot 2}-\frac{2+D'}{c}x+\frac{3+3D'+D''}{c^2}\right)\frac{d^2F}{dy^2}+\text{ec.}\end{array}\right.$$

Se poi diamo un valore particolare alle costanti, se per esempio le ponghiamo tutte eguali a zero, troveremo

$$z=e^{ax}\left\{\begin{array}{l}F.x+\frac{\delta}{c}\left(x-\frac{1}{c}\right)\frac{dF}{dy}\\ +\frac{\delta^2}{c^2}\left(\frac{x^2}{1\cdot 2}-\frac{2}{c}x+\frac{3}{c^2}\right)\frac{d^2F}{dy^2}+\text{ec.}\end{array}\right.$$

Questi due valori di z sono egualmente generali; poichè senza accrescere la generalità del secondo vi si può mettere $F.y+m\frac{dF}{dy}+m'\frac{d^2F}{dy^2}+$ec. in luogo di $F.y$, e si possono sempre determinare le costanti m, m', ec. in modo, che il secondo valore dopo la sostituzione diventi identico al primo.

Siccome adunque possiamo prendere a piacere il valore di queste costanti, affine di ottenere A_p espressa più semplicemente determiniamole in modo, che nel valore di A_p svanisca il termine senza x, cioè $C_{p,p}$. Avremo primieramente $D'=-1$, e quindi

$$C_{r,p}=\frac{1}{(-c)^r}\frac{(p-r)(p+r-1)(p+r-2)\ldots(p+1)}{1\cdot 2\ldots\ldots r}$$
$$+\frac{1}{(-c)^r}\left(D''\frac{(p+r-1)(p+r-2)\ldots(p+2)}{1\cdot 2\ldots(r-2)}+D'''\frac{(p+r-1)\ldots(p+3)}{1\ldots(r-3)}\ldots+D^{(r)}\right)$$

e facendo $r=p$

$$C_{p,p}=\frac{1}{(-c)^p}\left\{\begin{array}{l} D''\frac{(2p-1)(2p-2)\ldots(p+2)}{1\cdot 2\ldots\ldots(p-2)} \\ +D'''\frac{(2p-1)(2p-2)\ldots(p+3)}{1\cdot 2\ldots\ldots(p-3)}\ldots+D^{(p)}\end{array}\right.$$

onde, perchè svanisca $C_{p,p}$ qualunque sia p, converrà che siano eguali a zero tutte le costanti D'', D''', $\ldots D^{(p)}$. Sarà pertanto

$$C_{r,p}=\frac{1}{(-c)^r}\cdot\frac{(p-r)(p+r-1)(p+r-2)\ldots(p+1)}{1\cdot 2\ldots\ldots\ldots\ldots r},$$

e perciò

$$\frac{c^p A_p}{\partial^p e^{ax}}=\frac{x^p}{1.2\ldots p}-\frac{p-1}{c}\cdot\frac{x^{p-1}}{1.2\ldots(p-1)}+\frac{(p-2)(p+1)}{1\cdot 2c^2}\cdot\frac{x^{p-2}}{1.2\ldots(p-2)}$$

$$-\frac{(p-3)(p+2)(p+1)}{1\cdot 2\cdot 3\,c^3}\cdot\frac{x^{p-3}}{1\cdot 2\ldots(p-3)}\cdot\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\pm\frac{1\cdot(2p-2)(2p-3)\ldots(p+1)}{1\cdot 2\ldots\ldots(p-1)c^{p-1}}\cdot\frac{x}{1}.$$

Se invece di prendere $A_0=e^{ax}$ avessimo posto $A_0=e^{bx}$, che è un'altro integrale particolare della equazione (1), saremmo giunti similmente ad un'altra serie

$$z=B_0 f.y+B_1\frac{df}{dy}+B_2\frac{d^2f}{2dy^2}+B_3\frac{d^3f}{3dy^3}+\text{ec.}$$

ed è chiaro che il valore trovato di A_p si cangerà in quello di B_p, purchè solo vi si muti a in b, e b in a, e per conseguenza c in $-c$. Onde finalmente

$$z=A_0 F.y+A_1\frac{dF}{dy}+A_2\frac{d^2F}{2dy^2}+A_3\frac{d^3F}{3dy^3}+\text{ec.}$$

$$+B_0 f.y+B_1\frac{df}{dy}+B_2\frac{d^2f}{2dy^2}+B_3\frac{d^3f}{3dy^3}+\text{ec.}$$

sarà l'integrale completo della proposta, il quale contiene le due funzioni arbitrarie $F.y$ e $f.y$.

49.

Questa forma d'integrale cessa di aver luogo, quando le due quantità a e b sono eguali. Per trovare in questo caso l'integrale della proposta ripigliamo il valore di A_p, che allora diventa

$$A_p = \partial^p e^{ax} \int^{2p} dx^{2p} \phi.x ,$$

e riflettendo che $A_0 = e^{ax}$ troveremo $\phi.x = 1$. Quindi sarà

$$A_p = \partial^p e^{ax} \left(\frac{x^{2p}}{1.2 \ldots 2p} + C_{1,p} \frac{x^{2p-1}}{1 \ldots (2p-1)} + C_{2,p} \frac{x^{2p-2}}{1 \ldots (2p-2)} \ldots + C_{2p,p} \right).$$

Sostituendo questo valore nella equazione (a), e ricordandoci che nel caso di a e b eguali abbiamo $2\alpha + \gamma = 0$ otterremo per determinare la funzione $C_{r,p}$ l'equazione

$$C_{r,p+1} = C_{r,p} .$$

Saranno perciò $C_{1,p}$, $C_{2,p}$, ec. costanti, e facendole per più semplicità tutte eguali a zero avremo

$$A_p = \partial^p e^{ax} . \frac{x^{2p}}{1.2 \ldots 2p} ,$$

e per conseguenza

$$z = e^{ax} \left(F.y + \frac{\partial x^2}{1.2} \frac{dF}{dy} + \frac{\partial^2 x^4}{1.2.3.4} \frac{d^2F}{dy^2} + \frac{\partial^3 x^6}{1.2.3.4.5.6} \frac{d^3F}{dy^3} + \text{ec.} \right).$$

Ma nel caso di a e b eguali in luogo di $A_0 = e^{ax}$ si può anche prendere $A_0 = e^{ax}.x$, il qual valore soddisfà egualmente alla equazione (1). Ciò posto sarà $\phi.x = x$, ed $A_p = \partial^p e^{ax} \int^{2p} dx^{2p} .x$; onde con un discorso simile al precedente si troverà

$$A_p = \partial^p e^{ax} . \frac{x^{2p+1}}{1.2 \ldots (2p+1)} ,$$

e quindi avremo

$$z=e^{ax}\left(xf.y+\frac{\delta x^3}{1.2.3}\frac{df}{dy}+\frac{\delta^2x^5}{1.2.3.4.5}\frac{d^2f}{dy^2}+\text{ec.}\right)$$

e questo valore di z aggiunto all'altro trovato di sopra ci darà l'integrale completo della proposta

$$z=e^{ax}.\begin{cases}F.y+xf.y+\dfrac{\delta x^2}{2}\left(\dfrac{dF}{dy}+\dfrac{x}{3}\dfrac{df}{dy}\right)\\ +\dfrac{\delta^2x^4}{2.3.4}\left(\dfrac{d^2F}{dy^2}+\dfrac{x}{5}\dfrac{d^2f}{dy^2}\right)+\text{ec.}\end{cases}$$

50.

A questi medesimi risultati si può giungere con un'altro metodo, il quale invero è meno diretto, ma assai più semplice. Si ponga nella proposta

$$\frac{d^2z}{dx^2}+\gamma\frac{dz}{dx}+\beta z-\delta\frac{dz}{dy}=0$$

in luogo di z la quantità e^{mx+ny}, ove m ed n sono costanti, ed avremo tra m ed n l'equazione

$$(c)\qquad m^2+\gamma m+\beta-\delta n=0.$$

Ammessa tra m ed n la relazione stabilita in questa equazione sarà $z=e^{mx+ny}$ un integrale particolare della proposta. Si svolga adesso in una serie ordinata per le potenze di n la quantità e^{mx}, e sia

$$e^{mx}=A_0+A_1n+A_2n^2+A_3n^3+\text{ec.},$$

avremo moltiplicando per e^{ny}

$$z=e^{mx+ny}=A_0e^{ny}+A_1ne^{ny}+A_2n^2e^{ny}+A_3n^3e^{ny}+\text{ec.},$$

la qual serie si può mettere sotto la forma

$$z=A_0e^{ny}+A_1\frac{d.e^{ny}}{dy}+A_2\frac{d^2.e^{ny}}{dy^2}+\text{ec.}$$

Ora siccome questo valore di z soddisfa alla proposta, fattane la sostituzione in essa dovranno svanire separatamente i coefficienti di e^{ny}, $\frac{d.e^{ny}}{dy}$, $\frac{d^2.e^{ny}}{dy^2}$, ec. a motivo di n qualunque. Quindi se in luogo di e^{ny} poniamo qualsivoglia funzione arbitra-

ria di y, cioè $F.y$, svaniranno egualmente dopo la sostituzione i coefficienti di $F.y, \frac{dF}{dy}, \frac{d^2F}{dy^2}$, che sono quelli stessi di e^{ny}, $\frac{d.e^{ny}}{dy}, \frac{d^2.e^{ny}}{dy^2}$, ec. Dunque soddisfarà alla proposta la serie

$$z = A_0 F.y + A_1 \frac{dF}{dy} + A_2 \frac{d^2F}{dy^2} + A_3 \frac{d^3F}{dy^3} + \text{ec.}$$

e siccome due serie si ottengono per e^{mx}, due simili valori si avranno per z, e la loro somma comprendendo due funzioni arbitrarie sarà l'integrale completo della proposta.

Parrebbe a prima vista, che invece di prendere dalla equazione (*c*) il valore di m per n fosse più semplice di prendere quello di n per m. Ma siccome non si avrebbe che una serie sola per esprimere il valore di e^{ny}, non si otterrebbe in tal modo, che un integrale particolare, perchè comprenderebbe una sola funzione arbitraria.

Mediante questo metodo, che si deve all'illustre Geometra *Brunacci*, si riduce la ricerca dell'integrale alla evoluzione di e^{mx} in una serie ordinata per le potenze intere di n. Al compimento di esso si richiede l'evoluzione della quantità e^{mx} in tal modo eseguita, che ci faccia conoscere il valore generale di A_p; lo che potrà ottenersi per mezzo del teorema di *Laplace* (44). Trasportando questo teorema alle presenti denominazioni avremo

$$A_p = - \frac{d^{p-1}.(m-a)^p e^{mx}.x \,.\, \frac{d^p \log.[(m-a)(m-b)-\delta n]}{1.2....p dn^p}}{1.2.....(p-1)dm^{p-1}},$$

ove $m-a$, $m-b$ sono i fattori della quantità $m^2+\gamma m+\beta$, e dobbiamo fare $n=0$ dopo le differenziazioni relative ad n, ed $m=a$ dopo tutte le differenziazioni.

Incominciando dall'eseguire le differenziazioni relative ad n, e facendo poi $n=0$ avremo

$$\frac{d^p.\log,[(m-a)(m-b)-\delta n]}{1.2.....pdn^p}=-\frac{\delta^p}{p(m-a)^p(m-b)^p},$$

e quindi sarà

$$A_p=\delta^p x\frac{d^{p-1}.e^{mx}(m-b)^{-p}}{1.2...pdm^{p-1}}.$$

Differenziando adesso per rapporto ad m otterremo

$$\frac{d^{p-1}.e^{mx}(m-b)^{-p}}{dm^{p-1}}=(m-b)^{-p}.\frac{d^{p-1}.e^{mx}}{dm^{p-1}}+(p-1)\frac{d.(m-b)^{-p}}{dm}.\frac{d^{p-2}.e^{mx}}{dm^{p-2}}$$
$$+\frac{(p-1)(p-2)}{2}\frac{d^2.(m-b)^{-p}}{dm^2}.\frac{d^{p-3}.e^{mx}}{dm^{p-3}}...+e^{mx}\frac{d^{p-1}.(m-b)^{-p}}{dm^{p-1}},$$

ed eseguendo le differenziazioni di e^{mx} e di $(m-b)^{-p}$

$$\frac{d^{p-1}.e^{mx}.(m-b)^{-p}}{dm^{p-1}}=e^{mx}.\begin{cases}(m-b)^{-p}.x^{p-1}-p(p-1)(m-b)^{-p-1}.x^{p-2}\\ +\frac{(p+1)p(p-1)(p-2)}{1.2}(m-b)^{-p-2}.x^{p-3}\\ .....\\ \pm p(p+1)(p+2)...(2p-2)(m-b)^{-2p+1}\end{cases}$$

Quindi facendo $m=a$ troveremo finalmente

$$A_p=\frac{\delta^p e^{ax}}{(a-b)^p}.\begin{cases}\frac{x^p}{1.2...p}-\frac{p-1}{a-b}.\frac{x^{p-1}}{1.2...(p-1)}+\frac{(p-2)(p+1)}{1.2(a-b)^2}.\frac{x^{p-2}}{1.2...(p-2)}\\ -\frac{(p-3)(p+2)(p+1)}{1.2.3(a-b)^3}.\frac{x^{p-3}}{1.2...(p-3)}.....\\ .....\pm\frac{1.(2p-2)(2p-3)....(p+1)}{1.2....(p-1)(a-b)^{p-1}}.\frac{x}{1}\end{cases}$$

il qual valore combina con quello, che abbiamo trovato (43) coll'altro metodo.

51.

Il caso di $a=b$ ci presenta il medesimo inconveniente osservato al num.° 49., poichè l'equazione (c), che allora diventa

$$(c)\qquad (m-a)^2-\delta n=0$$

non ci permette di svolgere il valore di e^{mx} per le potenze intere di n. Mancando questa evoluzione il metodo del num.° passato è da se solo insufficiente per la ricerca dell'integrale della proposta: ma usando un particolare artifizio potremo giungere anche in questo caso al valore completo di z. Infatti prendendo dalla equazione (c) il valore di m avremo $m=a\pm\sqrt{\delta n}$, e $z=e^{mx+ny}=e^{ax+ny\pm x\sqrt{\delta n}}$. Sviluppata in serie la quantità $e^{\pm x\sqrt{\delta n}}$ sarà

$$e^{\pm x\sqrt{\delta n}}=1\pm x\sqrt{\delta n}+\frac{x^2}{2}\delta n+\frac{x^3}{2.3}\delta n\sqrt{\delta n}+\text{ec.},$$

onde prendendo due costanti arbitrarie C e C' otterremo il seguente valore particolare di z

$$z=Ce^{ax+ny}\left(1+x\sqrt{\delta n}+\frac{x^2}{2}\delta n+\frac{x^3}{2.3}\delta n\sqrt{\delta n}+\text{ec.}\right)$$
$$+C'e^{ax+ny}\left(1-x\sqrt{\delta n}+\frac{x^2}{2}\delta n-\frac{x^3}{2.3}\delta n\sqrt{\delta n}+\text{ec.}\right).$$

Se facciamo $C=C'=\frac{1}{2}$, questo valore di z diventerà

$$(e)\qquad z=e^{ax+ny}\left(1+\frac{x^2}{2}\delta n+\frac{x^4}{2.3.4}\delta^2 n^2+\text{ec.}\right)$$

e ponendo $-C'=C=\frac{1}{2\sqrt{\delta n}}$ si cangerà in

$$(e')\qquad z=e^{ax+ny}\left(x+\frac{x^3}{2.3}\delta n+\frac{x^5}{2.3.4.5}\delta^2 n^2+\text{ec.}\right)$$

Ora da quest'equazioni (e), (e'), le quali egualmente soddisfanno alla proposta, col discorso usato di sopra dedurremo l'integrale completo

$$z=e^{ax}\left(F.y+\frac{\delta x^2}{2}\frac{dF}{dy}+\frac{\delta^2 x^4}{2.3.4}\frac{d^2F}{dy^2}+\text{ec.}\right)$$
$$+e^{ax}\left(xf.y+\frac{\delta x^3}{2.3}\frac{df}{dy}+\frac{\delta^2 x^5}{2.3.4.5}\frac{d^2f}{dy^2}+\text{ec.}\right)$$

52.

Laplace in una sua Memoria sull'equazioni a differenze parziali pubblicata nel volume dell'Accademia delle Scienze di Parigi dell'anno 1773. asserisce, che l'equazione da noi contemplata

$$\frac{d^2z}{dx^2}+\gamma\frac{dz}{dx}+\beta z-\delta\frac{dz}{dy}=0,$$

se si eccettua il caso di $\delta=0$, non è suscettibile d' integrale completo nè puro espresso per una serie infinita. La proposizione di questo gran Geometra si deve così interpretare; l'integrale cioè essere impossibile sotto la forma da lui assegnata alla serie, che è la seguente

$$z=AF.\mu+Bf d\mu F.\mu+Cf^2 d\mu^2 F.\mu+\text{ec.}$$

la quale progredisce secondo gl'integrali della funzione arbitraria. Poichè è stato da esso rigorosamente dimostrato, che una tal forma è impossibile qualunque funzione di x ed y sia μ; ma la dimostrazione non è applicabile ad una serie, la quale proceda per i differenziali della funzione arbitraria. Infatti non solo abbiamo trovato possibile il valore di z espresso dalla serie

$$z=A_0F.y+A_1\frac{dF}{dy}+A_2\frac{d^2F}{dy^2}+\text{ec.},$$

ma abbiamo in tutti i casi assegnato il termine generale $A_p\frac{d^pF}{dy^p}$ di questa serie.

53.

Se facciamo $y+hx=u$, $y+kx=t$, essendo h e k costanti, ed introduciamo nella proposta in luogo di x ed y le nuove variabili u e t, avremo la trasformata

$$h^2\frac{d^2z}{du^2}+2hk\frac{d^2z}{dudt}+k^2\frac{d^2z}{dt^2}+(h\gamma-\delta)\frac{dz}{du}+(k\gamma-\delta)\frac{dz}{dt}+\beta z=0,$$

alla quale applicando i metodi precedenti ne dedurremo il valore di z espresso per serie infinita, che conterrà due funzioni arbitrarie di u o di t, cioè di $y+hx$ o di $y+kx$. Quindi potremo avere l'integrale della proposta sotto infinite forme diverse secondo gl'infiniti valori, che possiamo dare alle costanti h e k.

Posta $h=0$ la trasformata diventerà

$$h^2\frac{d^2z}{du^2}+(h\gamma-\delta)\frac{dz}{du}-\delta\frac{dz}{dy}+\beta z=0,$$

la quale è affatto simile alla proposta, e la proposta si cangia in questa, se si pone u o sia $y+hx$ in luogo di x, $\frac{\gamma}{h}-\frac{\delta}{h^2}$ in luogo di γ, $\frac{\delta}{h^2}$ in luogo di δ, e $\frac{\beta}{h^2}$ invece di β. In questo caso si

troverà la nuova serie che esprime il valore di z senza nuovo calcolo, e basterà fare i precedenti cangiamenti nel valore trovato di A_p.

54.

Le medesime trasformazioni potranno qualche volta condurci a trovare l'integrale completo di quell'equazioni, che non lo ammettono sotto la forma primitiva. Prendiamo per esempio a considerare l'equazione

$$\frac{d^2z}{dxdy} - a^2z = 0,$$

e facendo $z = e^{mx+ny}$ troveremo dopo la sostituzione $mn - a^2 = 0$, cioè $m = \frac{a^2}{n}$, e perciò

$$e^{mx} = e^{\frac{a^2}{n}x} = 1 + \frac{a^2}{n}x + \frac{a^4}{2n^2}x^2 + \frac{a^6}{2.3n^3}x^3 + \text{ec.}$$

Moltiplicando per e^{ny} avremo

$$z = e^{ny}\left(1 + \frac{a^2}{n}x + \frac{a^4}{2n^2}x^2 + \frac{a^6}{2.3n^3}x^3 + \text{ec.}\right),$$

la qual quantità si può mettere sotto la forma

$$z = e^{ny} + a^2x\int e^{ny}dy + \frac{a^4x^2}{2}\int^2 e^{ny}dy^2 + \frac{a^6x^3}{2.3}\int^3 e^{ny}dy^3 + \text{ec.}$$

Quindi col discorso usato di sopra vedremo che dovrà alla proposta soddisfare anche la formola più generale

$$z = F.y + a^2x\int Fdy + \frac{a^4x^2}{2}\int^2 Fdy^2 + \frac{a^6x^3}{2.3}\int^3 Fdy^3 + \text{ec.}$$

Ma siccome non abbiamo che un solo valore di m, non potremo ottenere l'integrale completo della proposta, perchè la formola precedente non comprende che una sola funzione arbitraria.

Per conseguire l'integrale completo facendo $u = y + hx$, $t = y + kx$ introduciamo nella proposta in luogo di x ed y le nuove variabili t ed u, ed avremo la trasformata

$$h\frac{d^2z}{du^2} + (h+k)\frac{d^2z}{dudt} + k\frac{d^2z}{dt^2} - a^2z = 0,$$

o sia ponendo per più semplicità $h = 1$, $k = -1$

$$\frac{d^2z}{du^2}-\frac{d^2z}{dt^2}-a^2z=0\ .$$

Se facciamo come sopra

$$z=A_0F.t+A_1\frac{dF}{dt}+A_2\frac{d^2F}{dt^2}+A_3\frac{d^3F}{dt^3}+\text{ec.},$$

ove A_0, A_1, A_2, ec. sono funzioni di u, e sostituiamo questo valore in luogo di z, troveremo tra le quantità A_0, A_2, A_4, ec. le medesime relazioni, che esistono tra le quantità A_1, A_3, A_5, ec.; ond'è facile vedere che potremo dare a z la forma seguente

$$z=A_0F.t+A_1\frac{d^3F}{dt^3}+A_2\frac{d^4F}{dt^4}+A_3\frac{d^6F}{dt^6}+\text{ec.}$$

Ciò posto se sostituiamo nella equazione precedente questo valore in luogo di z, otterremo per determinare le quantità A_0, A_1, A_2, ec. l'equazioni

$$\frac{d^2A_0}{du^2}-a^2A_0=0$$
$$\frac{d^2A_{p+1}}{du^2}-a^2A_{p+1}-A_p=0\ .$$

Quest' equazioni sono comprese nell' equazioni (1) ed (*a*) del num.° 48., ed il valore di A_p quivi trovato si cangerà perciò in quello che conviene al caso presente, purchè vi si ponga u o sia $y+x$ in luogo di x, $-a$ in luogo di b, e l'unità in luogo di δ. Dal valore di A_p si dedurrà quello di B_p, se nel primo si muterà a in $-a$; e la formola

$$z=A_0F.(y-x)+A_1\frac{d^2F}{dy^2}+A_2\frac{d^4F}{dy^4}+\text{ec.}$$
$$+B_0f.(y-x)+B_1\frac{d^3f}{dy^2}+B_2\frac{d^4f}{dy^4}+\text{ec.}$$

che contiene le due funzioni arbitrarie $F.(y-x)$ e $f.(y-x)$ sarà l' integrale completo della equazione

$$\frac{d^2z}{dxdy}-a^2z=0\ .$$

È facile il vedere che i metodi esposti si possono applicare all'equazioni della medesima forma di un ordine più elevato e tra un più gran numero di variabili. Non è nostr'oggetto di trattenerci di più in queste ricerche, e solo ne abbiamo parlato per mostrare l'uso che in esse può avere il calcolo dell'equazioni a differenze parziali finite ed infinitesime. Gli esempj addotti dimostrano manifestamente quanta sia l'utilità di tal calcolo in tutta la dottrina delle serie, e quanto per conseguenza importi di coltivare e promuovere questo nuovo ramo di analisi.

FINE.

INDICE

DEGLI OPUSCOLI CONTENUTI IN QUESTO TOMO.

Prefazione dell' Autore.

Opuscolo I. Esposizione dei principj del Calcolo Differenziale secondo il metodo di Lagrange . . . . . Pag. 1

Opuscolo II. Sulla Risoluzione dell' equazioni 99

Opuscolo III. Dell' equazioni a differenze parziali finite ed infinitesime 165

Fig. 2.

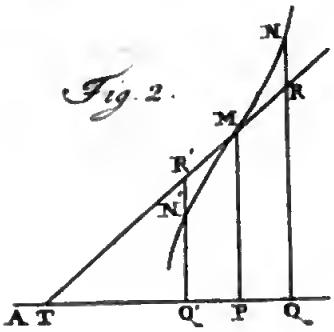


Fig 3

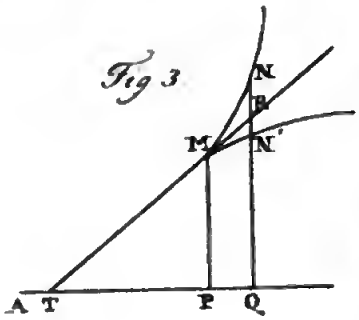


Fig. 5.

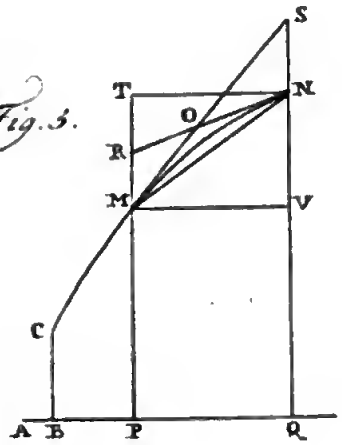


Fig. 6.

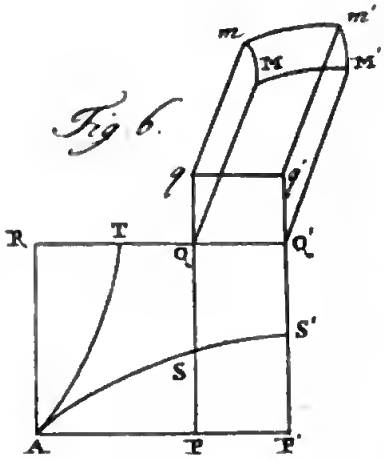
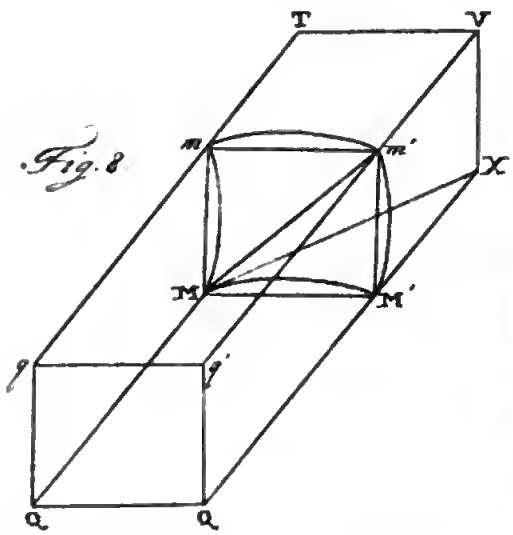
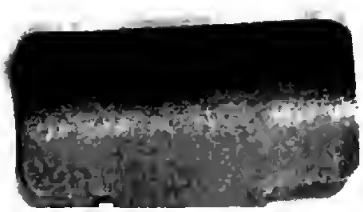


Fig. 8





00568265O

Digitized by Google